

Higher-form symmetries and 3-group in axion electrodynamics

横倉 諒 (KEK)

ポスター番号 15

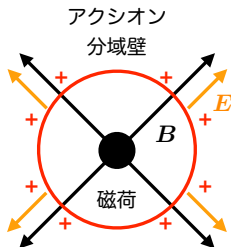
2021. 3. 29

KEK 素核宇・物性 連携研究会, online

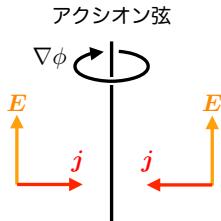
Y. Hidaka, M. Nitta, RY, Phys. Lett. B **808** (2020) 135672 [2006.12532]

に基づく

やったこと



ウィッテン効果



異常ホール効果

- アクシオン電磁気学には「3 群」で記述される大域的対称性が存在する
- アクシオンのウィッテン効果や異常ホール効果は、3 群で理解できる

技術的には、

- アクシオン電磁気学の大域的高次対称性を明らかにした
- 高次対称性の生成子の相関関数から 3 群の構造を導いた

もくじ

1 導入

2 アクシオン電磁気学とその高次対称性

3 ウィッテン効果と異常ホール効果を高次対称性で見る

4 アクシオン電磁気学における 3 群

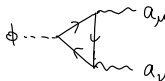
アクシオン電磁気学: アクシオン ϕ + 光子 a_μ + トポロジカル結合

[Wilczek '87]

$$\frac{N}{4\pi^2} \phi \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \frac{N}{32\pi^2} \phi \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} f_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} = \frac{N}{8\pi^2} \phi da \wedge da$$

特徴

1. トポロジカル結合: 量子異常で決まる (高次補正を受けない)



2. 素粒子・ハドロン・物性系に遍在

ϕ = QCD アクシオン, π^0 中間子, アクシオン絶縁体,...

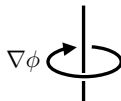
3. 時間・空間的に広がった物体の存在



磁気単極子



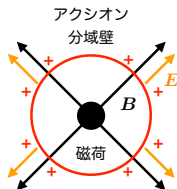
アクシオン分域壁



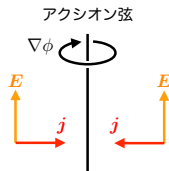
アクシオン弦

トポロジカル結合は広がった物体に非自明な物理を与える

広がった物体に関するウィッテン効果 & 異常ホール効果



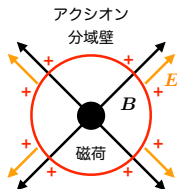
ウィッテン効果



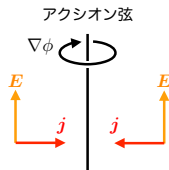
異常ホール効果

- ウィッテン効果: 磁荷 + アクシオン分域壁 $\rightarrow$ 電荷 [Witten '79; Sikivie '84; Kogan '92]

広がった物体に関するウィッテン効果 & 異常ホール効果



ウィッテン効果

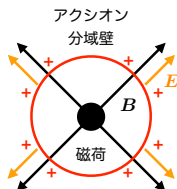


異常ホール効果

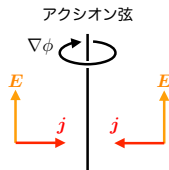
- ウィッテン効果: 磁荷 + アクシオン分域壁 → 電荷 [Witten '79; Sikivie '84; Kogan '92]

電場のガウスの法則の変更: $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{N}{4\pi^2} \nabla \phi \cdot \mathbf{B}$ (元は $\theta \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ があると磁荷が電荷を持つ現象)

広がった物体に関するウィッテン効果 & 異常ホール効果



ウィッテン効果



異常ホール効果

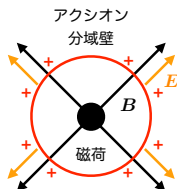
- ウィッテン効果: 磁荷 + アクシオン分域壁 $\rightarrow$ 電荷 [Witten '79; Sikivie '84; Kogan '92]

電場のガウスの法則の変更: $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{N}{4\pi^2} \nabla \phi \cdot \mathbf{B}$ (元は $\theta \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ があると磁荷が電荷を持つ現象)

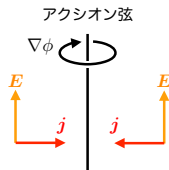
- 異常ホール効果: アクシオン弦 + 電場 $\rightarrow$ 電流

[Sikivie '84; Wilczek '87; Qi, et al. '08; Teo & Kane '10]

広がった物体に関するウィッテン効果 & 異常ホール効果



ウィッテン効果



異常ホール効果

- ウィッテン効果: 磁荷 + アクシオン分域壁 → 電荷 [Witten '79; Sikivie '84; Kogan '92]

電場のガウスの法則の変更: $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{N}{4\pi^2} \nabla \phi \cdot \mathbf{B}$ (元は $\theta \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ があると磁荷が電荷を持つ現象)

- 異常ホール効果: アクシオン弦 + 電場 → 電流

[Sikivie '84; Wilczek '87; Qi, et al. '08; Teo & Kane '10]

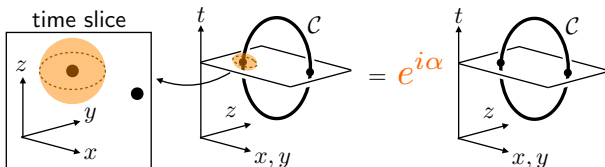
マクスウェル・アンペールの法則の変更: $\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{N}{4\pi^2} \nabla \phi \times \mathbf{E}$

問い: 広がった物体の物理の背後にある数理?

候補: 大域的高次対称性 [Gaiotto et al. '14]

広がった p 次元物体に作用する変換のもとでの大域的対称性

(従来の対称性は 0 次対称性: ローカルな場に作用)



例: 真空中の電磁気学での 1 次対称性

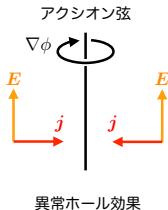
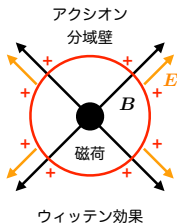
- 広がった物体: 試験電荷の世界線 (ウィルソンループ) $e^i \int_C a_\mu dx^\mu$
- 変換生成子 = 保存量: 電気力線の面積分 $\exp(i\alpha \int_S *da)$

応用例: 電磁気学の相構造を大域的対称性で分類

- 真空中の電磁気学: $U(1)$ 1 次対称性が破れた相, NG ボソン = 光子
- (s 波) 超伝導相: $\mathbb{Z}_2$ 1 次対称性が破れた相 (トポロジカル秩序相を大域的対称性の SSB で理解可能)

アクシオン電磁気学における高次対称性?

これからやること



- アクシオン電磁気学の高次対称性とその群構造を明らかにする
- ウィッテン効果と異常ホール効果を高次対称性の構造から考察する

答え:

- 高次対称性: $\mathbb{Z}_N$ 0 次、電氣的 $\mathbb{Z}_N$ 1 次、磁氣的 $U(1)$ 1 次、 $U(1)$ 2 次対称性
- 群構造: 3 群
- ウィッテン効果: 3 群の作用
- 異常ホール効果: パイファー・リフティング (3 群に特徴的な構造)

アクシオン電磁気学とその高次対称性

Y. Hidaka, M. Nitta, RY, Phys. Lett. B **808** (2020) 135672

メッセージ

アクシオン電磁気学には 4 種類の高次対称性がある

種類	群	作用される物体	
0 次	$\mathbb{Z}_N$	アクシオン	$e^{i\phi(\mathcal{P})} \rightarrow e^{i(\phi(\mathcal{P})+2\pi/N)}$
電氣的 1 次	$\mathbb{Z}_N$	点電荷の世界線	$e^{i \int_C a} \rightarrow e^{2\pi i/N} e^{i \int_C a}$
磁氣的 1 次	$U(1)$	点磁荷の世界線	$T(C) \rightarrow e^{i\alpha_1} T(C)$
2 次	$U(1)$	アクシオン弦の世界面	$V(S) \rightarrow e^{i\alpha_2} V(S)$

セットアップ [Wilczek '87]

作用

$$S = - \int \left(\frac{v^2}{2} |d\phi|^2 + \frac{1}{2e^2} |da|^2 - \frac{N}{8\pi^2} \phi da \wedge da \right)$$

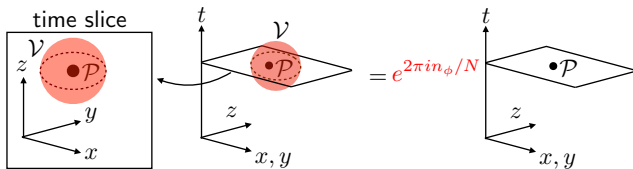
v : 崩壊定数, e : 結合定数

- アクシオン ϕ : $\phi + 2\pi \sim \phi$ を満たす擬スカラー場 (NG ボソン $e^{i\phi}$)
- 電磁場 $a = a_\mu dx^\mu$: $U(1)$ ゲージ場
- N : 自然数 (UV での Dirac フェルミオンの数)

$$S = - \int d^4x \left(\frac{v^2}{2} |\partial_\mu \phi|^2 + \frac{1}{2e^2} |f_{\mu\nu}|^2 - \frac{N}{32\pi^2} \phi \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} f_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} \right), f_{\mu\nu} = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu$$

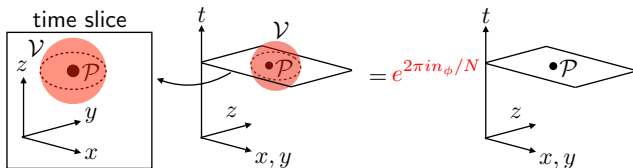
$$S_{\text{UV}} = - \int \left(\frac{1}{2e^2} |da|^2 + \frac{v^2}{2} |d\phi|^2 + i\bar{\psi}_i (\not{\partial} - i\not{A}) \psi_i + y v \bar{\psi}_i e^{i\gamma_5 \phi} \psi_i \right), \psi_i: \text{Dirac フェルミオン } i = 1, \dots, N$$

$\mathbb{Z}_N$ 0 次対称性: アクシオン $e^{i\phi(\mathcal{P})}$ のシフト対称性 [導出]



- 保存則: アクシオンの EOM $d(v^2 * d\phi + \frac{N}{8\pi^2} a \wedge da) = 0$

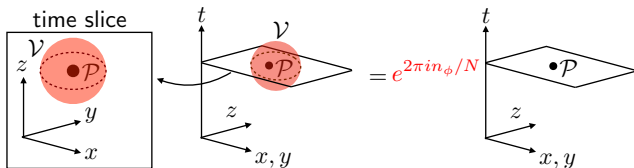
$\mathbb{Z}_N$ 0 次対称性: アクシオン $e^{i\phi(\mathcal{P})}$ のシフト対称性 [導出]



- 保存則: アクシオンの EOM $d(v^2 * d\phi + \frac{N}{8\pi^2} a \wedge da) = 0$
- 変換生成子:

$$U_0(e^{2\pi i n_\phi / N}, \mathcal{V}) = \exp \left(\frac{2\pi i n_\phi}{N} \int_{\mathcal{V}} (-v^2 * d\phi - \frac{N}{8\pi^2} a \wedge da) \right), \quad (\mathcal{V}: 3\text{D 世界体積})$$

$\mathbb{Z}_N$ 0 次対称性: アクシオン $e^{i\phi(\mathcal{P})}$ のシフト対称性 [導出]



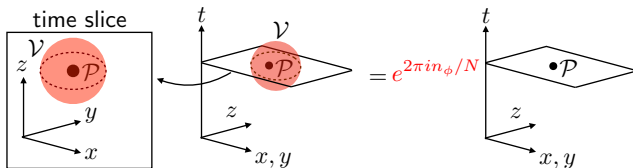
- 保存則: アクシオンの EOM $d(v^2 * d\phi + \frac{N}{8\pi^2} a \wedge da) = 0$

- 変換生成子:

$$U_0(e^{2\pi i n_\phi / N}, \mathcal{V}) = \exp\left(\frac{2\pi i n_\phi}{N} \int_{\mathcal{V}} (-v^2 * d\phi - \frac{N}{8\pi^2} a \wedge da)\right), (\mathcal{V}: 3\text{D 世界体積})$$

- 変換される 0 次元物体: $e^{i\phi(\mathcal{P})}$ ($\phi + 2\pi \sim \phi$ の同一視で不変)

$\mathbb{Z}_N$ 0 次対称性: アクション $e^{i\phi(\mathcal{P})}$ のシフト対称性 [導出]



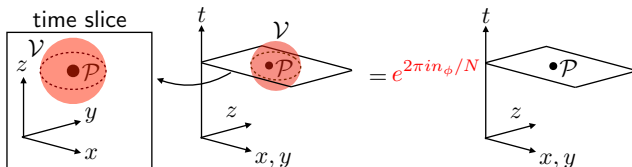
- 保存則: アクションの EOM $d(v^2 * d\phi + \frac{N}{8\pi^2} a \wedge da) = 0$

- 変換生成子:

$$U_0(e^{2\pi i n_\phi / N}, \mathcal{V}) = \exp\left(\frac{2\pi i n_\phi}{N} \int_{\mathcal{V}} (-v^2 * d\phi - \frac{N}{8\pi^2} a \wedge da)\right), \quad (\mathcal{V}: 3\text{D 世界体積})$$

- 変換される 0 次元物体: $e^{i\phi(\mathcal{P})}$ ($\phi + 2\pi \sim \phi$ の同一視で不変)
- 変換群は $\mathbb{Z}_N$ (アノマリーによる) [詳細]

$\mathbb{Z}_N$ 0 次対称性: アクシオン $e^{i\phi(\mathcal{P})}$ のシフト対称性 [導出]

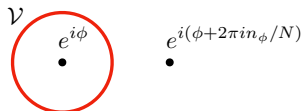


- 保存則: アクシオンの EOM $d(v^2 * d\phi + \frac{N}{8\pi^2} a \wedge da) = 0$

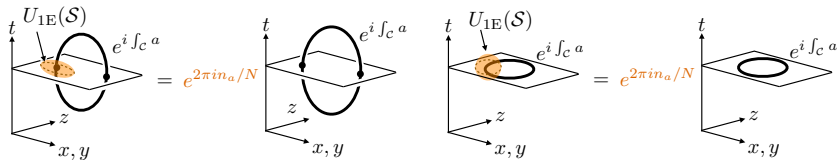
- 変換生成子:

$$U_0(e^{2\pi i n_\phi / N}, \mathcal{V}) = \exp\left(\frac{2\pi i n_\phi}{N} \int_{\mathcal{V}} (-v^2 * d\phi - \frac{N}{8\pi^2} a \wedge da)\right), (\mathcal{V}: 3D \text{ 世界体積})$$

- 変換される 0 次元物体: $e^{i\phi(\mathcal{P})}$ ($\phi + 2\pi \sim \phi$ の同一視で不変)
- 変換群は $\mathbb{Z}_N$ (アノマリーによる) [詳細]
- 生成子自体を分域壁とみなせる (ウィッテン効果で使える) ($\mathcal{V}$ 内部と外部で $\phi(\mathcal{P})$ の値が変わる)

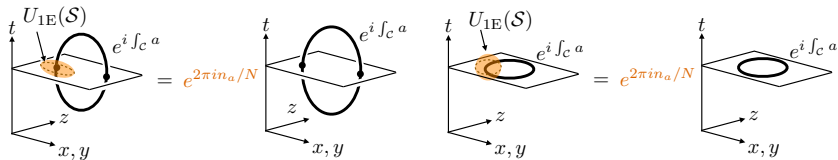


電氣的 $\mathbb{Z}_N$ 1 次対称性: 電束と磁場の保存則 [導出]



- 保存則は光子の EOM: $d(\frac{1}{e^2} * da - \frac{N}{4\pi^2} \phi da) = 0$

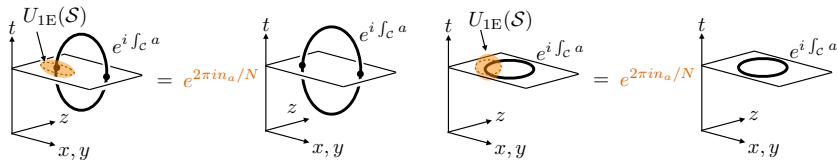
電氣的 $\mathbb{Z}_N$ 1 次対称性: 電束と磁場の保存則 [導出]



- 保存則は光子の EOM: $d(\frac{1}{e^2} * da - \frac{N}{4\pi^2} \phi da) = 0$
- 変換生成子: 電束の面積分 or 磁場の線積分 (を時間方向にも伸ばしたもの)

$$U_{1E}(e^{2\pi i n_a / N}, \mathcal{S}) = \exp \left(\frac{2\pi i n_a}{N} \int_{\mathcal{S}} (\frac{1}{e^2} * da - \frac{N}{4\pi^2} \phi da) \right)$$

電氣的 $\mathbb{Z}_N$ 1 次対称性: 電束と磁場の保存則 [導出]

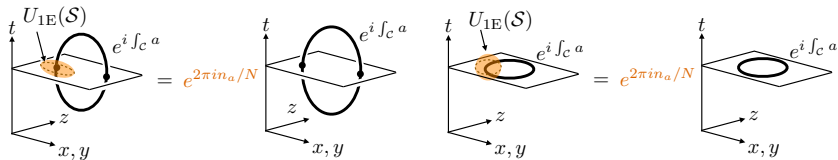


- 保存則は光子の EOM: $d(\frac{1}{e^2} * da - \frac{N}{4\pi^2} \phi da) = 0$
- 変換生成子: 電束の面積分 or 磁場の線積分 (を時間方向にも伸ばしたもの)

$$U_{1E}(e^{2\pi i n_a / N}, S) = \exp\left(\frac{2\pi i n_a}{N} \int_S (\frac{1}{e^2} * da - \frac{N}{4\pi^2} \phi da)\right)$$

- 変換される 1 次元物体 $e^{i \int_C a}$: 点電荷の世界線 or 瞬間的な電流 (電束 or 磁場のソース)

電氣的 $\mathbb{Z}_N$ 1 次対称性: 電束と磁場の保存則 [導出]

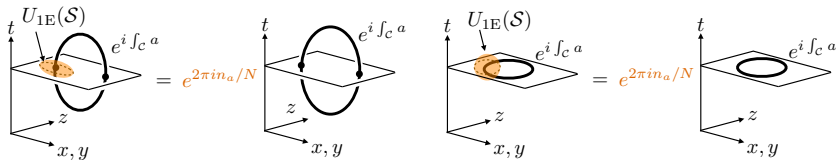


- 保存則は光子の EOM: $d(\frac{1}{e^2} * da - \frac{N}{4\pi^2} \phi da) = 0$
- 変換生成子: 電束の面積分 or 磁場の線積分 (を時間方向にも伸ばしたもの)

$$U_{1E}(e^{2\pi i n_a / N}, S) = \exp\left(\frac{2\pi i n_a}{N} \int_S (\frac{1}{e^2} * da - \frac{N}{4\pi^2} \phi da)\right)$$

- 変換される 1 次元物体 $e^{i \int_C a}$: 点電荷の世界線 or 瞬間的な電流 (電束 or 磁場のソース)
- 変換群は $\mathbb{Z}_N$ (アノマリーによる)

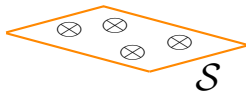
電氣的 $\mathbb{Z}_N$ 1 次対称性: 電束と磁場の保存則 [導出]



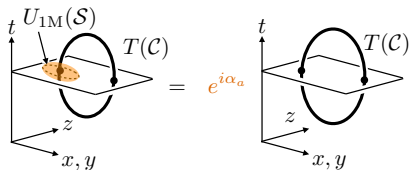
- 保存則は光子の EOM: $d(\frac{1}{e^2} * da - \frac{N}{4\pi^2} \phi da) = 0$
- 変換生成子: 電束の面積分 or 磁場の線積分 (を時間方向にも伸ばしたもの)

$$U_{1E}(e^{2\pi i n_a / N}, S) = \exp \left(\frac{2\pi i n_a}{N} \int_S (\frac{1}{e^2} * da - \frac{N}{4\pi^2} \phi da) \right)$$

- 変換される 1 次元物体 $e^{i \int_C a}$: 点電荷の世界線 or 瞬間的な電流 (電束 or 磁場のソース)
- 変換群は $\mathbb{Z}_N$ (アノマリーによる)
- 変換生成子は外部電場とみなせる (異常ホール効果で使える)

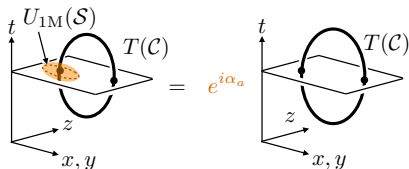


磁氣的 $U(1)$ 1 次対称性: 電場と磁束の保存則



- 保存則は光子のビアンキ恒等式: $dda = 0$

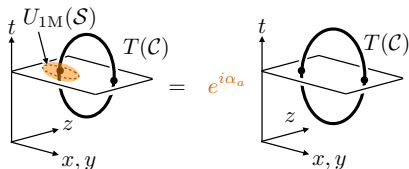
磁氣的 $U(1)$ 1 次対称性: 電場と磁束の保存則



- 保存則は光子のビアンキ恒等式: $dda = 0$
- 変換生成子: 磁束の面積分 (or 電場の線積分を時間方向にも伸ばしたものの)

$$U_{1M}(e^{i\alpha_a}, S) = \exp\left(\frac{i\alpha_a}{2\pi} \int_S da\right)$$

磁氣的 $U(1)$ 1 次対称性: 電場と磁束の保存則

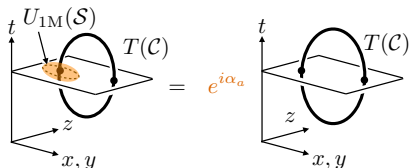


- 保存則は光子のビアンキ恒等式: $dda = 0$
- 変換生成子: 磁束の面積分 (or 電場の線積分を時間方向にも伸ばしたもの)

$$U_{1M}(e^{i\alpha_a}, \mathcal{S}) = \exp\left(\frac{i\alpha_a}{2\pi} \int_{\mathcal{S}} da\right)$$

- 変換される 1 次元物体 $T(\mathcal{C})$: 点磁荷の世界線 (or 瞬間的な磁流)

磁氣的 $U(1)$ 1 次対称性: 電場と磁束の保存則

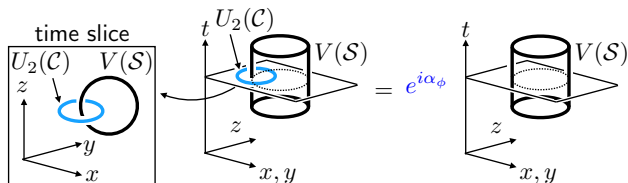


- 保存則は光子のビアンキ恒等式: $dda = 0$
- 変換生成子: 磁束の面積分 (or 電場の線積分を時間方向にも伸ばしたもの)

$$U_{1M}(e^{i\alpha_a}, \mathcal{S}) = \exp\left(\frac{i\alpha_a}{2\pi} \int_{\mathcal{S}} da\right)$$

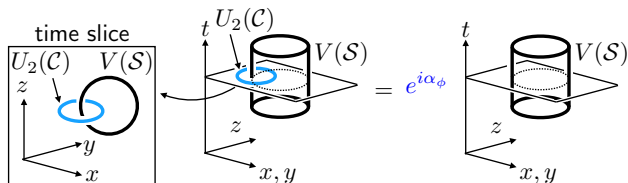
- 変換される 1 次元物体 $T(\mathcal{C})$: 点磁荷の世界線 (or 瞬間的な磁流)
- 変換群は $U(1)$

$U(1)$ 2 次対称性: アクシオンの巻きつき数の保存則



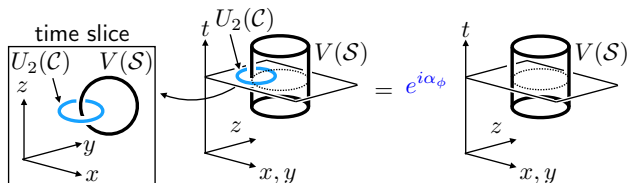
- 保存則はアクシオンのビアンキ恒等式: $dd\phi = 0$.

$U(1)$ 2 次対称性: アクシオンの巻きつき数の保存則



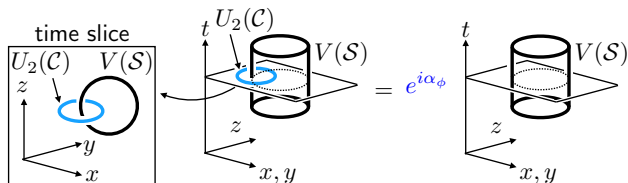
- 保存則はアクシオンのビアンキ恒等式: $dd\phi = 0$.
- 変換生成子: アクシオンの巻きつき数 $U_2(e^{i\alpha\phi}, \mathcal{C}) = \exp\left(\frac{i\alpha\phi}{2\pi} \int_{\mathcal{C}} d\phi\right)$

$U(1)$ 2 次対称性: アクシオンの巻きつき数の保存則



- 保存則はアクシオンのビアンキ恒等式: $dd\phi = 0$.
- 変換生成子: アクシオンの巻きつき数 $U_2(e^{i\alpha\phi}, C) = \exp\left(\frac{i\alpha\phi}{2\pi} \int_C d\phi\right)$
- 変換される 2 次元物体 $V(S)$: アクシオン弦の世界面 (巻きつき数のソース)

$U(1)$ 2 次対称性: アクシオンの巻きつき数の保存則



- 保存則はアクシオンのビアンキ恒等式: $dd\phi = 0$.
- 変換生成子: アクシオンの巻きつき数 $U_2(e^{i\alpha\phi}, C) = \exp\left(\frac{i\alpha\phi}{2\pi} \int_C d\phi\right)$
- 変換される 2 次元物体 $V(S)$: アクシオン弦の世界面 (巻きつき数のソース)
- 変換群は $U(1)$

ここまでのまとめ

アクシオン電磁気学には 4 種類の高次対称性がある

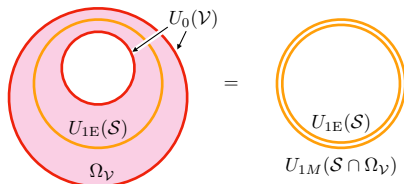
種類	群	変換	
0 次	$\mathbb{Z}_N$	アクシオンのシフト	$e^{i\phi(\mathcal{P})} \rightarrow e^{i(\phi(\mathcal{P})+2\pi/N)}$
電氣的 1 次	$\mathbb{Z}_N$	点電荷の閉世界線の位相変換	$e^{i\int_C a} \rightarrow e^{2\pi i/N} e^{i\int_C a}$
磁氣的 1 次	$U(1)$	磁気単極子の閉世界線の位相変換	$T(\mathcal{C}) \rightarrow e^{i\alpha_1} T(\mathcal{C})$
2 次	$U(1)$	アクシオンひもの世界面の位相変換	$V(\mathcal{S}) \rightarrow e^{i\alpha_2} V(\mathcal{S})$

ウィッテン効果と異常ホール効果を高次対称性で見る

これらの効果の背後にある対称性の構造は何か？

手法: 変換生成子の相関関数を調べる (カレント代数の拡張)

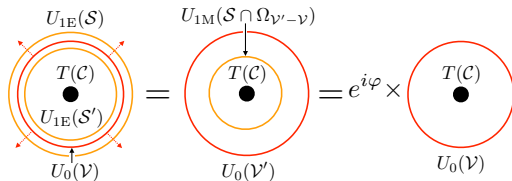
ウィッテン効果: 0 次対称性 $\times$ 電氣的 1 次対称性 = 磁氣的 1 次対称性



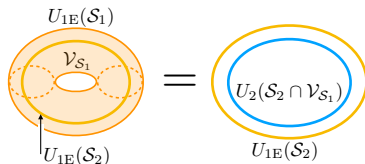
$$\langle U_0(e^{2\pi i n_\phi/N}, \mathcal{V}) U_{1E}(e^{2\pi i n_a/N}, \mathcal{S}) \rangle = \langle U_{1M}(e^{-2\pi i n_\phi n_a/N}, \Omega_{\mathcal{V}} \cap \mathcal{S}) U_{1E}(e^{2\pi i n_a/N}, \mathcal{S}) \rangle$$

($U_{1E} \sim \exp(i \int_S \phi da)$ の ϕ を U_0 でシフトする)[詳細]

実際にウィッテン効果を記述できる (アクシオン分域壁から生じた電氣力線を数える)



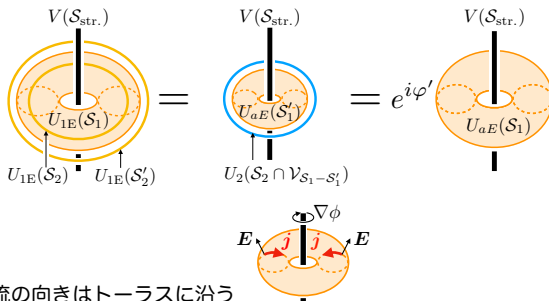
異常ホール効果: 電氣的 1 次対称性 $\times$ 電氣的 1 次対称性 = 2 次対称性



$$\langle U_{1E}(e^{2\pi i n_a/N}, S) U_{1E}(e^{2\pi i n'_a/N}, S') \rangle = \langle U_2(e^{-2\pi i n_a n'_a/N}, \mathcal{V}_S \cap S') U_{1E}(e^{2\pi i n'_a/N}, S') \rangle$$

($U_{1E} \sim \exp(\int_S \phi da)$ の a を変換している) [詳細]

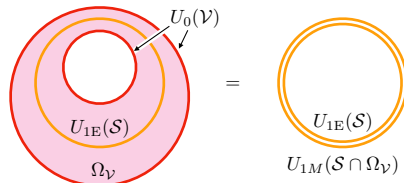
実際に異常ホール効果を記述できる (ホール電流の作る磁力線を数える。)



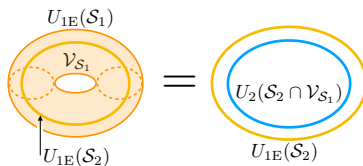
注: ホール電流の向きはトーラスに沿う

問い: 変換生成子の相関関数の背後にある数理的構造は何?

- ウィッテン効果: 0 次対称性 $\times$ 1 次対称性 = 1 次対称性



- 異常ホール効果: 1 次対称性 $\times$ 1 次対称性 = 2 次対称性



- Cf. 従来のカレント代数 = 従来の群論: 0 次対称性 $\times$ 0 次対称性 = 0 次対称性

従来の群論を超えた枠組みが必要

アクション電磁気学における 3 群

3 群とは？ 数学的には... [Conduché '84; Matrins & Picken '09]

公理 (のなかで今回使うもの) [詳細]

- 3 つの群 G, H, L
- 作用 $\triangleright$: G から G, H, L への変換 (随伴表現の拡張): $g \triangleright g' = gg'g^{-1}, g \triangleright h, g \triangleright l$
- パイファー・リフティング: H の 2 つの元から L への写像 $\{h, h'\} \in L$
- ...

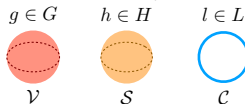
(注: 3 群は正式には 2-crossed module または semistrict 3-group と呼ばれる。ここでは単に 3 群と書く。)

3 群とは？ より物理的に...

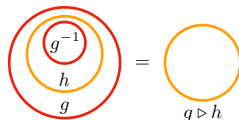
この解釈で 3 群の公理を満たせる

高次対称性で 3 群を記述できる

- G, H, L の元: 0,1,2 次対称性の変換生成子 (正確には群のユニタリ表現)

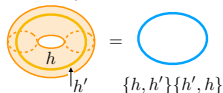


- G の作用 $\triangleright$: 0 次対称性の生成子で他の生成子を囲む



- パイファー・リフティング $\{h, h'\}$:

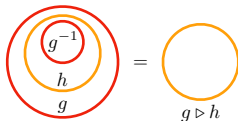
1 次対称性の生成子同士の “リンク” (surface link と呼ばれる) [Carter, et al '01]



ちょうどウィッテン効果と異常ホール効果を記述できそうな概念がある！

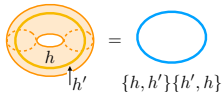
アクション電磁気学における 3 群

- 3 つの群: $G = \mathbb{Z}_N$ (0 次), $H = \mathbb{Z}_N \times U(1)$ (1 次), $L = U(1)$ (2 次)
- ウィッテン効果 = G の作用 $\triangleright$:



$$e^{2\pi i n_\phi / N} \triangleright (e^{2\pi i n_a / N}, e^{i\alpha_a}) = (e^{2\pi i n_a}, e^{-2\pi i n_\phi n_a / N} e^{i\alpha_a})$$

- 異常ホール効果 = パイファー・リフティング:



$$\{(e^{2\pi i n_a / N}, e^{i\alpha_a}), (e^{2\pi i n'_a / N}, e^{i\alpha'_a})\}^2 = e^{-2\pi i n_a n'_a / N}$$

まとめ



- アクシオン電磁気学には「3 群」で記述される大域的対称性が存在する
- アクシオンのウィッテン効果や異常ホール効果は、3 群で理解できる
- Future work: アノマリー流入との関係 (defect 上の自由度まで含める)、アクシオンが質量を持つ時の高次対称性、などなど

Appendix

Group of 0-form symmetry is $\mathbb{Z}_N$ (1/4)

Large gauge invariance of $\int_V a \wedge da$ is crucial

1. Symmetry group seems continuous, i.e. $U(1)$ because conserved current exists

$$j_{\phi 3} = -v^2 * d\phi - \frac{N}{8\pi^2} a \wedge da, \quad dj_{\phi 3} = 0$$

Group of 0-form symmetry is $\mathbb{Z}_N$ (1/4)

Large gauge invariance of $\int_V a \wedge da$ is crucial

1. Symmetry group seems continuous, i.e. $U(1)$ because conserved current exists

$$j_{\phi 3} = -v^2 * d\phi - \frac{N}{8\pi^2} a \wedge da, \quad dj_{\phi 3} = 0$$

2. However, the conserved current is not gauge invariant under $a \rightarrow a + d\lambda$.

Group of 0-form symmetry is $\mathbb{Z}_N$ (1/4)

Large gauge invariance of $\int_V a \wedge da$ is crucial

1. Symmetry group seems continuous, i.e. $U(1)$ because conserved current exists

$$j_{\phi 3} = -v^2 * d\phi - \frac{N}{8\pi^2} a \wedge da, \quad dj_{\phi 3} = 0$$

2. However, the conserved current is not gauge invariant under $a \rightarrow a + d\lambda$.
3. The integral of the current, $e^{i\alpha_0} \int_V j_{\phi 3}$ with $e^{i\alpha_0} \in U(1)$, seems gauge invariant, since the gauge transf. is a total derivative.

Group of 0-form symmetry is $\mathbb{Z}_N$ (1/4)

Large gauge invariance of $\int_V a \wedge da$ is crucial

1. Symmetry group seems continuous, i.e. $U(1)$ because conserved current exists

$$j_{\phi 3} = -v^2 * d\phi - \frac{N}{8\pi^2} a \wedge da, \quad dj_{\phi 3} = 0$$

2. However, the conserved current is not gauge invariant under $a \rightarrow a + d\lambda$.
3. The integral of the current, $e^{i\alpha_0} \int_V j_{\phi 3}$ with $e^{i\alpha_0} \in U(1)$, seems gauge invariant, since the gauge transf. is a total derivative.
4. However, the integral is not large gauge invariant.

Group of 0-form symmetry is $\mathbb{Z}_N$ (1/4)

Large gauge invariance of $\int_V a \wedge da$ is crucial

1. Symmetry group seems continuous, i.e. $U(1)$ because conserved current exists

$$j_{\phi 3} = -v^2 * d\phi - \frac{N}{8\pi^2} a \wedge da, \quad dj_{\phi 3} = 0$$

2. However, the conserved current is not gauge invariant under $a \rightarrow a + d\lambda$.
3. The integral of the current, $e^{i\alpha_0} \int_V j_{\phi 3}$ with $e^{i\alpha_0} \in U(1)$, seems gauge invariant, since the gauge transf. is a total derivative.
4. However, the integral is not large gauge invariant.

Further, the shift symmetry of axion should be broken to $\mathbb{Z}_N$ by chiral anomaly from UV viewpoint.

Group of 0-form symmetry is $\mathbb{Z}_N$ (2/4)

In the following, we consider the topological unitary operator

$$U_0(e^{i\alpha_0}, \mathcal{V}) = e^{-i\alpha_0 \int_{\mathcal{V}} (v^2 * d\phi + \frac{N}{8\pi^2} a \wedge da)},$$

and show that the large gauge invariance of $U_0(e^{i\alpha_0}, \mathcal{V})$ requires $e^{i\alpha_0} \in \mathbb{Z}_N$.

Note: It is essentially the same as quantization of the level of Chern-Simons term in $(2+1)$ dim. [Henneaux & Teitelboim '86]

1. Since $d\phi$ is gauge invariant, we focus on the term $e^{-i\alpha_0 \frac{N}{8\pi^2} \int_{\mathcal{V}} a \wedge da}$.

Group of 0-form symmetry is $\mathbb{Z}_N$ (2/4)

In the following, we consider the topological unitary operator

$$U_0(e^{i\alpha_0}, \mathcal{V}) = e^{-i\alpha_0 \int_{\mathcal{V}} (v^2 * d\phi + \frac{N}{8\pi^2} a \wedge da)},$$

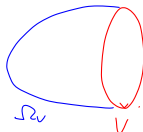
and show that the large gauge invariance of $U_0(e^{i\alpha_0}, \mathcal{V})$ requires $e^{i\alpha_0} \in \mathbb{Z}_N$.

Note: It is essentially the same as quantization of the level of Chern-Simons term in $(2+1)$ dim. [Henneaux & Teitelboim '86]

1. Since $d\phi$ is gauge invariant, we focus on the term $e^{-i\alpha_0 \frac{N}{8\pi^2} \int_{\mathcal{V}} a \wedge da}$.
2. In order to make the integrand be manifestly gauge invariant, we define

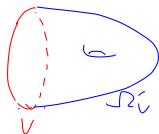
$$e^{-i\alpha_0 \frac{N}{8\pi^2} \int_{\mathcal{V}} a \wedge da} := e^{-i\alpha_0 \frac{N}{8\pi^2} \int_{\Omega_{\mathcal{V}}} da \wedge da}$$

on a 4d space $\Omega_{\mathcal{V}}$ satisfying $\partial\Omega_{\mathcal{V}} = \mathcal{V}$.



Group of 0-form symmetry is $\mathbb{Z}_N$ (3/4)

3. However, we have chosen a redundant space $\Omega_{\mathcal{V}}$, which may be replaced by another 4d space $\Omega'_{\mathcal{V}}$



4. The redundancy of the choice is absent if

$$e^{-i\alpha_0 \frac{N}{8\pi^2} \int_{\Omega_{\mathcal{V}}} da \wedge da} = e^{-i\alpha_0 \frac{N}{8\pi^2} \int_{\Omega'_{\mathcal{V}}} da \wedge da}, \quad \text{i.e.} \quad e^{-i\alpha_0 \frac{N}{8\pi^2} \int_{\Omega} da \wedge da} = 1$$

where $\Omega = \Omega_{\mathcal{V}} - \Omega'_{\mathcal{V}}$ is a closed 4d space. (Ω satisfies $\partial\Omega = \mathcal{V} - \mathcal{V} = 0$)



Group of 0-form symmetry is $\mathbb{Z}_N$ (4/4)

5. Since Ω is closed subspace $\partial\Omega = 0$, the Dirac quantization condition requires

$$\int_{\Omega} da \wedge da \in 2 \cdot (2\pi)^2 \mathbb{Z}$$

6. Therefore, we have the condition $\alpha_0 \in \frac{2\pi}{N} \mathbb{Z}$, which means

$$e^{i\alpha_0} \in \mathbb{Z}_N.$$

[back]

Derivation of 0-form transformation 1/4

We evaluate the correlation function

$$\langle U_0(e^{2\pi i n_\phi/N}, \mathcal{V}) e^{i\phi(\mathcal{P})} \rangle = \int \mathcal{D}[\phi, a] e^{iS + \frac{2\pi i n_\phi}{N} \int_{\mathcal{V}} j_{\phi 3} + i\phi(\mathcal{P})}$$



Let us integrate out $j_{\phi 3} = -v^2 * d\phi - \frac{N}{8\pi^2} a \wedge da$

1. local operators $\rightarrow$ spacetime integral

- $e^{i\phi(\mathcal{P})} = e^{i \int \phi \delta_4(\mathcal{P})}, \quad \text{where} \quad \delta_4(\mathcal{P}) = \delta^4(x - \mathcal{P}) dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^3$

- $\int_{\mathcal{V}} j_{\phi 3} = \int_{\partial\Omega_{\mathcal{V}}} j_{\phi 3} = \int_{\Omega_{\mathcal{V}}} dj_{\phi 3} = \int dj_{\phi 3} \delta_0(\Omega_{\mathcal{V}}),$

where $\Omega_{\mathcal{V}}$ is a 4d subspace satisfying $\partial\Omega_{\mathcal{V}} = \mathcal{V}$,

$$\delta_0(\Omega_{\mathcal{V}}) = \int_{\Omega_{\mathcal{V}}} \delta^4(x - y) dy^0 \wedge \cdots \wedge dy^3.$$

Derivation of 0-form transformation 2/4

2. Action + symmetry generator can be rewritten by

Completing the square

$$\begin{aligned} S[\phi, a] + \frac{2\pi n_\phi}{N} \int dj_{\phi 3} \delta_0(\Omega_{\mathcal{V}}) \\ = S[\phi - \frac{2\pi n_\phi}{N} \delta_0(\Omega_{\mathcal{V}}), a] + \frac{v^2}{2} \left(\frac{2\pi n_\phi}{N} \right)^2 \int \delta_1(\mathcal{V}) \wedge * \delta_1(\mathcal{V}). \end{aligned}$$

Here, we have defined/used

- $\delta_1(\mathcal{V}) = \frac{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{3!} dx^\sigma \int_{\mathcal{V}} \delta^4(x-y) dy^\nu \wedge dy^\rho \wedge dy^\sigma$
- $d\delta_0(\Omega_{\mathcal{V}}) = \delta_1(\partial\Omega_{\mathcal{V}}) = \delta_1(\mathcal{V})$
- $\int \omega_3 \wedge d\delta_0(\Omega_{\mathcal{V}}) = \int d\omega_3 \delta_0(\Omega_{\mathcal{V}}) = \int_{\Omega_{\mathcal{V}}} d\omega_3 = \int_{\partial\Omega_{\mathcal{V}}} \omega_3 = \int_{\mathcal{V}} \omega_3 = \int \omega_3 \wedge \delta_1(\mathcal{V})$

$$S[\phi, a] = - \int \left(\frac{v^2}{2} d\phi \wedge *d\phi + \frac{1}{2e^2} da \wedge *da - \frac{N}{8\pi^2} \phi da \wedge da \right), \quad j_{\phi 3} = -v^2 * d\phi - \frac{N}{8\pi^2} a \wedge da$$

Derivation of 0-form transformation 3/4

3. By the redefinition $\phi - \frac{2\pi n\phi}{N}\delta_0(\Omega_{\mathcal{V}}) \rightarrow \phi$, we have

Integrating out U_0

$$\begin{aligned}\langle U_0(e^{2\pi i n\phi/N}, \mathcal{V})e^{i\phi(\mathcal{P})} \rangle &= \int \mathcal{D}[\phi, a] e^{iS[\phi - \frac{2\pi n\phi}{N}\delta_0(\Omega_{\mathcal{V}}), a] + i\int \phi \delta_4(\mathcal{P})} \\ &= e^{\frac{2\pi i n\phi}{N} \int \delta_0(\Omega_{\mathcal{V}}) \delta_4(\mathcal{P})} \langle e^{i\phi(\mathcal{P})} \rangle,\end{aligned}$$

($\int \delta_1(\mathcal{V}) \wedge * \delta_1(\mathcal{V})$ has been regularized by local counter term.)

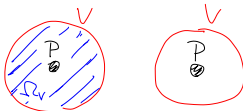
What is the phase factor $\int \delta_0(\Omega_{\mathcal{V}}) \delta_4(\mathcal{P})$?

Derivation of 0-form transformation 4/4

Linking number

$$\int \delta_0(\Omega_{\mathcal{V}}) \delta_4(\mathcal{P}) = \int_{\Omega_{\mathcal{V}}} \delta_4(\mathcal{P}) = \text{Link}(\mathcal{V}, \mathcal{P}) \in \mathbb{Z}$$

Intersection of $\Omega_{\mathcal{V}}$ and $\mathcal{P}$ = link of $\mathcal{V}$ and $\mathcal{P}$



Therefore, we obtain

$\mathbb{Z}_N$ 0-form transformation

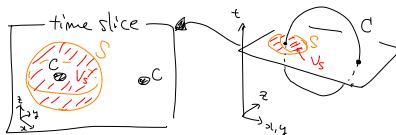
$$\langle U_0(e^{2\pi i n \phi / N}, \mathcal{V}) e^{i\phi(\mathcal{P})} \rangle = e^{\frac{2\pi i n \phi}{N} \text{Link}(\mathcal{V}, \mathcal{P})} \langle e^{i\phi(\mathcal{P})} \rangle$$

[back]

Derivation of 1-form transformation 1/4

We evaluate the correlation function

$$\langle U_{1E}(e^{2\pi i n_a/N}, \mathcal{S}) e^{i \int_C a} \rangle = \int \mathcal{D}[\phi, a] e^{iS + \frac{2\pi i n_a}{N} \int_S j_{a2} + i \int_C a}$$



Let us integrate out $j_{a2} = \frac{1}{e^2} * da - \frac{N}{4\pi^2} \phi da$

1. local operators $\rightarrow$ spacetime integral:

- $e^{i \int_C a} = e^{i \int a \wedge \delta_3(C)}$, where $\delta_3(C) = \frac{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{3!} dx^\nu \wedge \dots \wedge dx^\sigma \int_C \delta^4(x-y) dy^\mu$
- $\int_S j_{a2} = \int_{\partial \mathcal{V}_S} j_{a2} = \int_{\mathcal{V}_S} dj_{a2} = \int dj_{a2} \wedge \delta_1(\mathcal{V}_S)$,
where $\mathcal{V}_S$ is a 3d subspace satisfying $\partial \mathcal{V}_S = S$.

Derivation of 1-form transformation 2/4

2. Action + symmetry generator can be rewritten by

Completing the square

$$\begin{aligned} S[\phi, a] + \frac{2\pi n_\phi}{N} \int dj_{a2} \wedge \delta_1(\mathcal{V}_S) \\ = S[\phi, a + \frac{2\pi n_\phi}{N} \delta_1(\mathcal{V}_S)] + \frac{1}{2e^2} \left(\frac{2\pi n_a}{N} \right)^2 \int \delta_2(S) \wedge * \delta_2(S). \end{aligned}$$

Here, we have defined/used

- $\delta_2(S) = \frac{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{2! \cdot 2!} dx^\rho \wedge dx^\sigma \int_S \delta^4(x-y) dy^\mu \wedge dy^\nu$
- $d\delta_1(\mathcal{V}_S) = -\delta_2(\partial\mathcal{V}_S) = -\delta_2(S)$
- $-\int \omega_2 \wedge d\delta_1(\mathcal{V}_S) = \int d\omega_2 \wedge \delta_1(\mathcal{V}_S) = \int_{\mathcal{V}_S} d\omega_2 = \int_{\partial\mathcal{V}_S} \omega_2 = \int_S \omega_2 = \int \omega_2 \wedge \delta_2(S)$

$$S[\phi, a] = - \int \left(\frac{v^2}{2} d\phi \wedge *d\phi + \frac{1}{2e^2} da \wedge *da - \frac{N}{8\pi^2} \phi da \wedge da \right), \quad j_{a2} = \frac{1}{e^2} * da - \frac{N}{4\pi^2} \phi da$$

Derivation of 1-form transformation 3/4

3. By the redefinition $a + \frac{2\pi n\phi}{N}\delta_1(\mathcal{V}_S) \rightarrow a$, we have

Integrating out U_{1E}

$$\begin{aligned}\langle U_{1E}(e^{2\pi i n\phi/N}, \mathcal{V})e^{i\phi(\mathcal{P})}\rangle &= \int \mathcal{D}[\phi, a] e^{iS[\phi, a + \frac{2\pi n\phi}{N}\delta_1(\mathcal{V}_S)] + i\int a \wedge \delta_3(\mathcal{C})} \\ &= e^{\frac{2\pi i n a}{N} \int \delta_3(\mathcal{C}) \wedge \delta_1(\mathcal{V}_S)} \langle e^{i\int_C a} \rangle,\end{aligned}$$

($\int \delta_2(\mathcal{S}) \wedge * \delta_2(\mathcal{S})$ has been regularized by local counter term.)

What is the phase factor $\int \delta_3(\mathcal{C}) \wedge \delta_1(\mathcal{V}_S)$?

Derivation of 1-form transformation 4/4

Linking number

$$\int \delta_3(\mathcal{P}) \wedge \delta_1(\mathcal{V}_S) = \int_{\mathcal{V}_S} \delta_3(\mathcal{C}) = \text{Link}(\mathcal{S}, \mathcal{C}) \in \mathbb{Z}$$

Intersection of $\mathcal{V}_S$ and $\mathcal{C}$ = link of $\mathcal{S}$ and $\mathcal{C}$



Therefore, we obtain

$\mathbb{Z}_N$ 1-form transformation

$$\langle U_{1E}(e^{2\pi i n_a/N}, \mathcal{S}) e^{i \int_{\mathcal{C}} a} \rangle = e^{\frac{2\pi i n_a}{N} \text{Link}(\mathcal{S}, \mathcal{C})} \langle e^{i \int_{\mathcal{C}} a} \rangle$$

[back]

Correlation function $\langle U_0(e^{2\pi i n_\phi/N}, \mathcal{V}) U_{1E}(e^{2\pi i n_a/N}, \mathcal{S}) \rangle$

We evaluate

$$\langle U_0(e^{2\pi i n_\phi/N}, \mathcal{V}) U_{1E}(e^{2\pi i n_a/N}, \mathcal{S}) \rangle = \int \mathcal{D}[\phi, a] e^{iS[\phi, a] + \frac{2\pi i n_\phi}{N} \int_{\mathcal{V}} j_{\phi 3} + \frac{2\pi i n_a}{N} \int_{\mathcal{S}} j_{a 2}}$$

- Integrating out $j_{\phi 3}$ can be done by the shift $\phi \rightarrow \phi + \frac{2\pi n_\phi}{N} \delta_0(\Omega_{\mathcal{V}})$
- $U_{1E}(e^{2\pi i n_a/N}, \mathcal{S})$ is shifted as

$$\begin{aligned} U_{1E}(e^{2\pi i n_a/N}, \mathcal{S}) &\rightarrow U_{1E}(e^{2\pi i n_a/N}, \mathcal{S}) e^{-\frac{2\pi i n_\phi n_a}{N} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{S}} \delta_0(\Omega_{\mathcal{V}}) da} \\ &= U_{1E}(e^{2\pi i n_a/N}, \mathcal{S}) U_{1M}(e^{-2\pi i n_\phi n_a/N}, \Omega_{\mathcal{V}} \cap \mathcal{S}) \end{aligned}$$

[back]

$$U_{1E}(e^{2\pi i n_a/N}, \mathcal{S}) = e^{\frac{2\pi i n_a}{N} \int_{\mathcal{S}} j_{a 2}}, \quad j_{a 2} = \frac{1}{e^2} * da - \frac{N}{4\pi^2} \phi da$$

Correlation function $\langle U_{1E}(e^{2\pi i n_a/N}, \mathcal{S}) U_{1E}(e^{2\pi i n'_a/N}, \mathcal{S}') \rangle$

We evaluate

$$\langle U_{1E}(e^{2\pi i n_a/N}, \mathcal{S}) U_{1E}(e^{2\pi i n'_a/N}, \mathcal{S}') \rangle = \int \mathcal{D}[\phi, a] e^{iS[\phi, a] + \frac{2\pi i n_a}{N} \int_{\mathcal{S}} j_{a2} + \frac{2\pi i n'_a}{N} \int_{\mathcal{S}'} j_{a2}}$$

- Integrating out $U_{1E}(e^{2\pi i n_a/N}, \mathcal{S})$ can be done by the shift $a \rightarrow a - \frac{2\pi n_a}{N} \delta_1(\mathcal{V}_{\mathcal{S}})$
- $U_{1E}(e^{2\pi i n'_a/N}, \mathcal{S}')$ is shifted as $(\int_{\mathcal{S}'} * \delta_2(\mathcal{S})$ has been regularized)

$$\begin{aligned} U_{1E}(e^{2\pi i n'_a/N}, \mathcal{S}') &\rightarrow U_{1E}(e^{2\pi i n'_a/N}, \mathcal{S}') e^{\frac{2\pi i n_a n'_a}{N} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{S}'} \phi d\delta_1(\mathcal{V}_{\mathcal{S}})} \\ &= U_{1E}(e^{2\pi i n'_a/N}, \mathcal{S}') e^{\frac{-2\pi i n_a n'_a}{N} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{S}'} d\phi \wedge \delta_1(\mathcal{V}_{\mathcal{S}})} \\ &= U_{1E}(e^{2\pi i n'_a/N}, \mathcal{S}') U_2(e^{-2\pi i n_a n'_a/N}, \mathcal{V}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}') \end{aligned}$$

[back]

Axioms of 3-group 1/3

A semistrict 3-group (2-crossed module) is a set $(L \xrightarrow{\partial_2} H \xrightarrow{\partial_1} G, \triangleright, \{-, -\})$ satisfying the following axioms. Here, G , H , and L are groups.

1. The maps

$$\partial_1 : H \rightarrow G, \quad \partial_2 : L \rightarrow H$$

are group homomorphisms $\partial_1(h_1 h_2) = (\partial_1 h_1)(\partial_1 h_2)$ and

$\partial_2(l_1 l_2) = (\partial_2 l_1)(\partial_2 l_2)$ for $h_{1,2} \in H$ and $l_{1,2} \in L$, respectively. They satisfy

$$\partial_1 \circ \partial_2(l) = 1$$

for $l \in L$

Axioms of 3-group 2/3

2. $\triangleright$ is an action of $g \in G$ on $g' \in G$, $h \in H$, and $l \in L$ by automorphisms,
 $g \triangleright g' \in G$, $g \triangleright h \in H$, and $g \triangleright l \in L$. The action $g \triangleright g'$ is defined by conjugation,

$$g \triangleright g' := gg'g^{-1}.$$

3. $\partial_{1,2}$ are G -equivalent, that is,

$$g \triangleright (\partial_1 h) = \partial_1 (g \triangleright h), \quad g \triangleright (\partial_2 l) = \partial_1 (g \triangleright l),$$

Axioms of 3-group 3/3

4. The Peiffer lifting $\{-, -\}$ is a morphism $H \times H \rightarrow L$. In terms of the elements $h_{1,2} \in H$,

$$\{h_1, h_2\} \in L$$

For $l_{1,2} \in L$, the Peiffer lifting satisfies

$$\partial_2\{h_1, h_2\} = h_1 h_2 h_1^{-1} (\partial_1 h_1) \triangleright h_2^{-1},$$

$$g \triangleright \{h_1, h_2\} = \{g \triangleright h_1, g \triangleright h_2\},$$

$$\{\partial_2 l_1, \partial_2 l_2\} = l_1 l_2 l_1^{-1} l_2^{-1},$$

$$\{h_1 h_2, h_3\} = \{h_1, h_2 h_3 h_2^{-1}\} (\partial_1 h_1) \triangleright \{h_2, h_3\},$$

$$\{h_1, h_2 h_3\} = \{h_1, h_2\} \{h_1, h_3\} \{\partial_2 \{h_1, h_3\}^{-1}, (\partial_1 h_1) \triangleright h_2\},$$

$$\{\partial_2 l_1, h_2\} \{h_2, \partial_2 l_1\} = l_1 (\partial_1 h) \triangleright l_1^{-1}.$$

Bibliography

Bibliography - I

- [1] Y. Hidaka, M. Nitta, and R. Yokokura, "Higher-form symmetries and 3-group in axion electrodynamics," *Phys. Lett. B* **808** (2020) 135672, [arXiv:2006.12532 [hep-th]].
(page 1).
- [2] F. Wilczek, "Two Applications of Axion Electrodynamics," *Phys. Rev. Lett.* **58** (1987) 1799.
(pages 4, 5, 6, 7, 8, 13).
- [3] E. Witten, "Dyons of Charge $e\theta/2\pi$," *Phys. Lett. B* **86** (1979) 283–287.
(pages 5, 6, 7, 8).
- [4] P. Sikivie, "On the Interaction of Magnetic Monopoles With Axionic Domain Walls," *Phys. Lett.* **137B** (1984) 353–356.
(pages 5, 6, 7, 8).
- [5] I. I. Kogan, "Kaluza-Klein and axion domain walls: Induced charge and mass transmutation," *Phys. Lett. B* **299** (1993) 16–23.
(pages 5, 6, 7, 8).
- [6] X.-L. Qi, T. Hughes, and S.-C. Zhang, "Topological Field Theory of Time-Reversal Invariant Insulators," *Phys. Rev.* **B78** (2008) 195424, [arXiv:0802.3537 [cond-mat.mes-hall]].
(pages 5, 6, 7, 8).
- [7] J. C. Teo and C. Kane, "Topological Defects and Gapless Modes in Insulators and Superconductors," *Phys. Rev. B* **82** (2010) 115120, [arXiv:1006.0690 [cond-mat.mes-hall]].
(pages 5, 6, 7, 8).
- [8] D. Gaiotto, A. Kapustin, N. Seiberg, and B. Willett, "Generalized Global Symmetries," *JHEP* **02** (2015) 172, [arXiv:1412.5148 [hep-th]].
(page 9).
- [9] D. Conduché, "Modules croisés généralisés de longueur 2," *J. Pure Appl. Alg.* **34** (1984) no. 2, 155–178.
(page 38).

Bibliography - II

- [10] J. F. Martins and R. Picken, "The fundamental Gray 3-groupoid of a smooth manifold and local 3-dimensional holonomy based on a 2-crossed module," *Diff. Geom. Appl.* **29** (2009) 179–206, [arXiv:0907.2566 [math.CT]].
(page 38).
- [11] J. S. Carter, S. Kamada, M. Saito, and S. Satoh, "A theorem of sanderson on link bordisms in dimension 4," *Algebr. Geom. Topol.* **1** (2001) no. 1, 299–310.
(page 39).
- [12] M. Henneaux and C. Teitelboim, "Quantization of Topological Mass in the Presence of a Magnetic Pole," *Phys. Rev. Lett.* **56** (1986) 689–692.
(pages 48, 49).