

[Poster-17]

非平衡開放系における
南部・ゴールドストーンモードの
有効ラグランジアン

西暦 本郷 優 (UIC/理研iTHEMS)

2021年3月29日、KEK素核宇・物性 連携研究会

共同研究者：金 スロ、野海 俊文、太田 敦久

[MH-Kim-Noumi-Ota, PRD 103, 056020 (2021)]

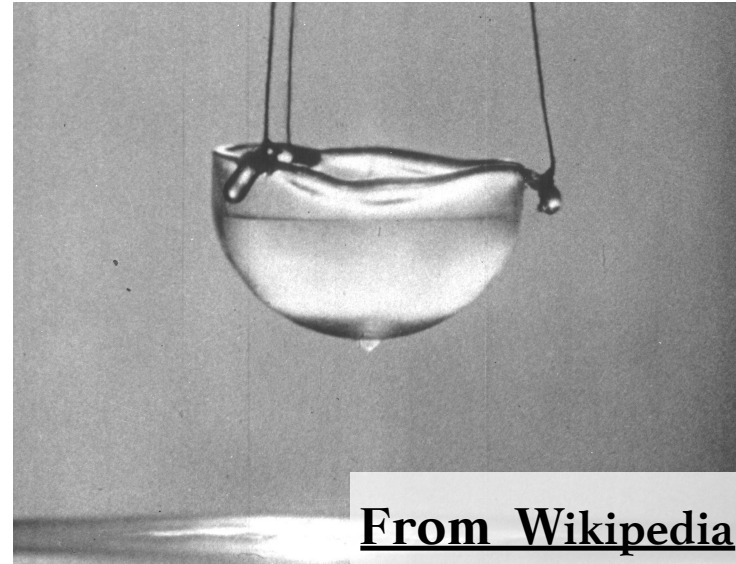
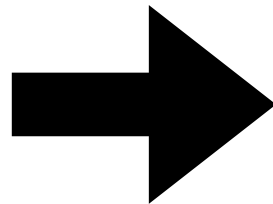
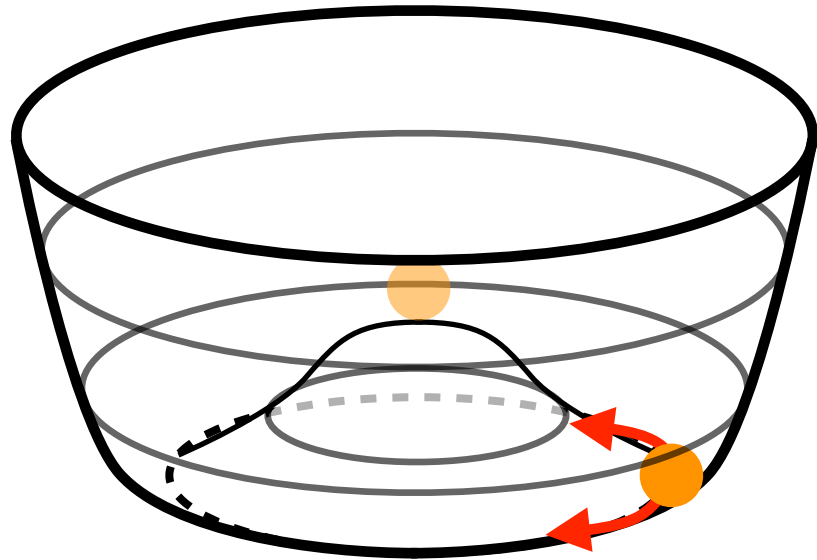


対称性の自発的破れとNGモード

[開放系におけるNGモード?]

対称性の自発的破れとNGモード

◆ U(1)対称性の自発的破れ：超流動フォノン



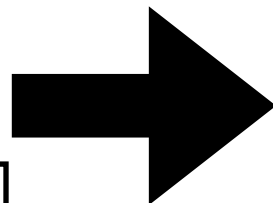
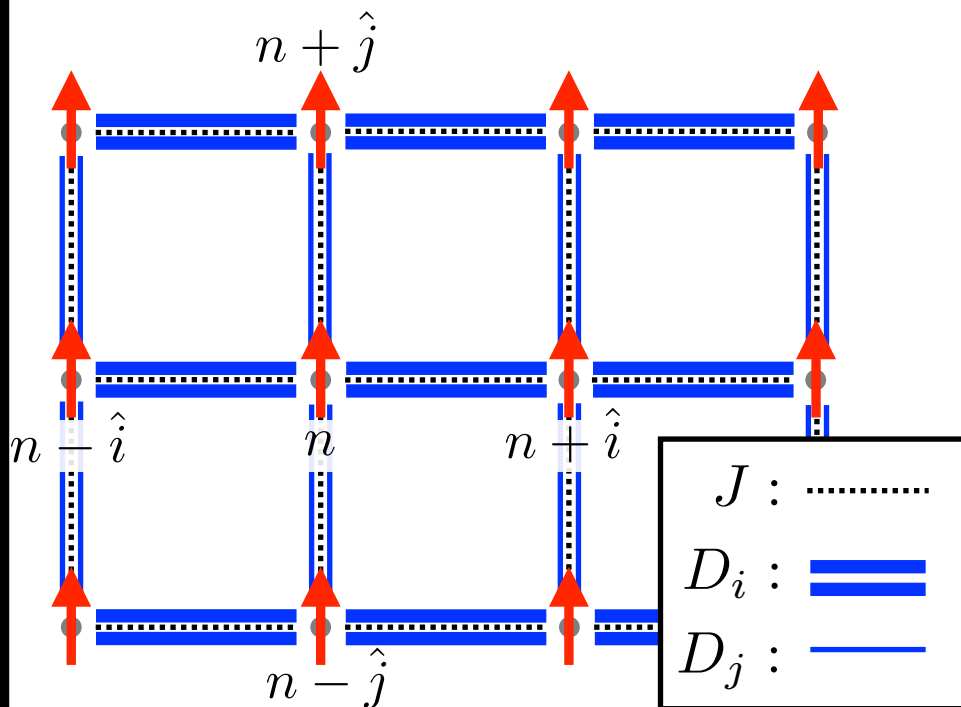
分散関係と
NGモードの数

$$\omega = ck$$

破れた対称性の数と

一致

◆ O(3)対称性の自発的破れ：強磁性マグノン



分散関係と
NGモードの数

$$\omega = ak^2$$

破れた対称性の数と

不一致

非相対論系へのNG定理の拡張

連続対称性 $\iff$ 保存電荷 $\hat{Q}_a$

◆ 対称性の自発的破れ(SSB)の定義

$\langle \delta_a \Phi_i(x) \rangle = \langle [i\hat{Q}_a, \hat{\Phi}_i(x)] \rangle \neq 0$ を満たす $\Phi_i(x)$ が存在

◆ NGモードの分類

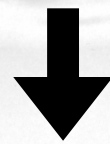
[Hidaka (2012),
Watanabe-Murayama(2012)]

- Type-A NG mode : $\forall \hat{Q}_b$ について $\langle [i\hat{Q}_a, \hat{Q}_b] \rangle = 0$
破れた対称性の数 = NGモードの数, $\omega = ck$ と線形分散
- Type-B NG mode : $\exists \hat{Q}_b$ such that $\langle [i\hat{Q}_a, \hat{Q}_b] \rangle \neq 0$
破れた対称性の数 $\neq$ NGモードの数, $\omega = ak^2$ と2乗分散など

非相対論系へのNG定理の拡張

超流動フォノンの場合

U(1)対称性のSSB



電荷は1つのみで**可換**



Type-A NGモード

強磁性マグノンの場合

O(3)対称性のSSB



$$\langle [i\hat{S}_x, \hat{S}_y] \rangle \propto \langle \hat{S}_z \rangle \neq 0$$



Type-B NGモード

◆ NGモードの分類

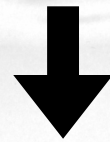
[Hidaka (2012),
Watanabe-Murayama(2012)]

- Type-A NG mode : $\forall \hat{Q}_b$ について $\langle [i\hat{Q}_a, \hat{Q}_b] \rangle = 0$
破れた対称性の数 = NGモードの数, $\omega = ck$ と**線形**分散
- Type-B NG mode : $\exists \hat{Q}_b$ such that $\langle [i\hat{Q}_a, \hat{Q}_b] \rangle \neq 0$
破れた対称性の数 $\neq$ NGモードの数, $\omega = ak^2$ と**2乗**分散など

非相対論系へのNG定理の拡張

超流動フォノンの場合

U(1)対称性のSSB



電荷は1つのみで**可換**



Type-A NGモード

強磁性マグノンの場合

O(3)対称性のSSB



$$\langle [i\hat{S}_x, \hat{S}_y] \rangle \propto \langle \hat{S}_z \rangle \neq 0$$



Type-B NGモード

◆ 有効ラグランジアンによる理解 – [Leutwyler (1994), Watanabe-Murayama(2012)]

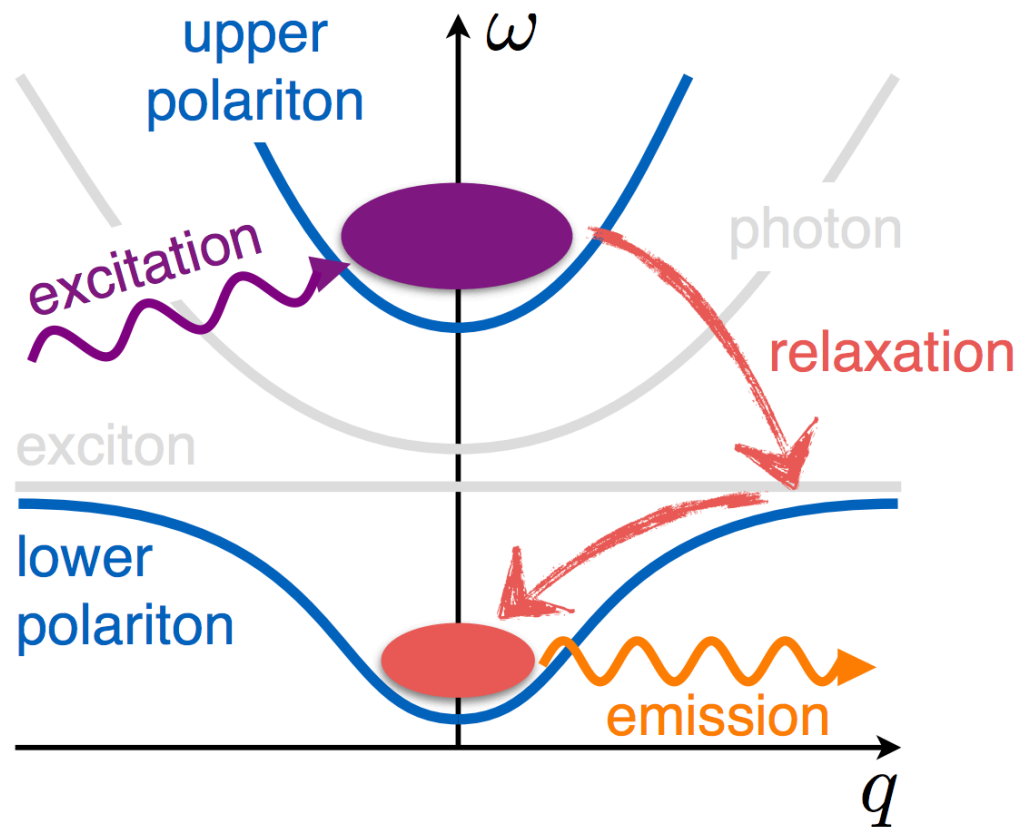
$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = m^\alpha f_{\alpha ab} \pi^a \partial_0 \pi^b + \frac{f^2}{2} g_{ab} \partial_0 \pi^a \partial_0 \pi^b - \frac{1}{2} g_{ab} \partial^i \pi^a \partial_i \pi^b + \dots$$

$\simeq \langle [i\hat{Q}_a, \hat{Q}_b] \rangle$: 非相対論系に特有な項

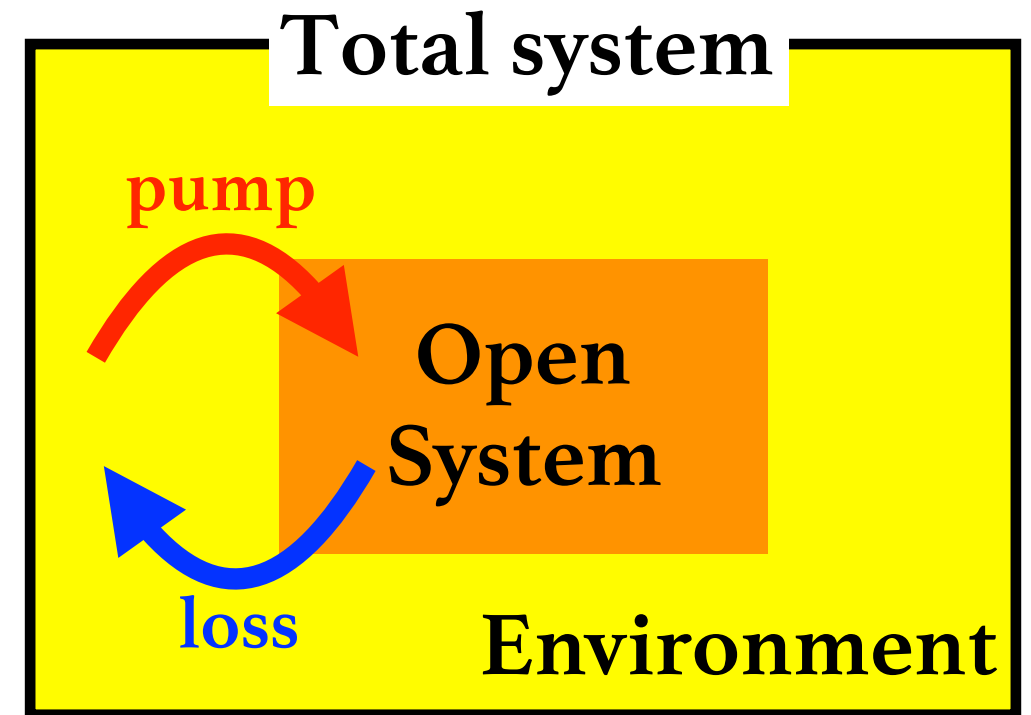
➡ Type-B NGモードを含むNG定理の一般化を記述

駆動散逸系における凝縮

◆ 駆動散逸環境下のエキシトン・ポラリトン系



[From Sieberer et al. (2016)]

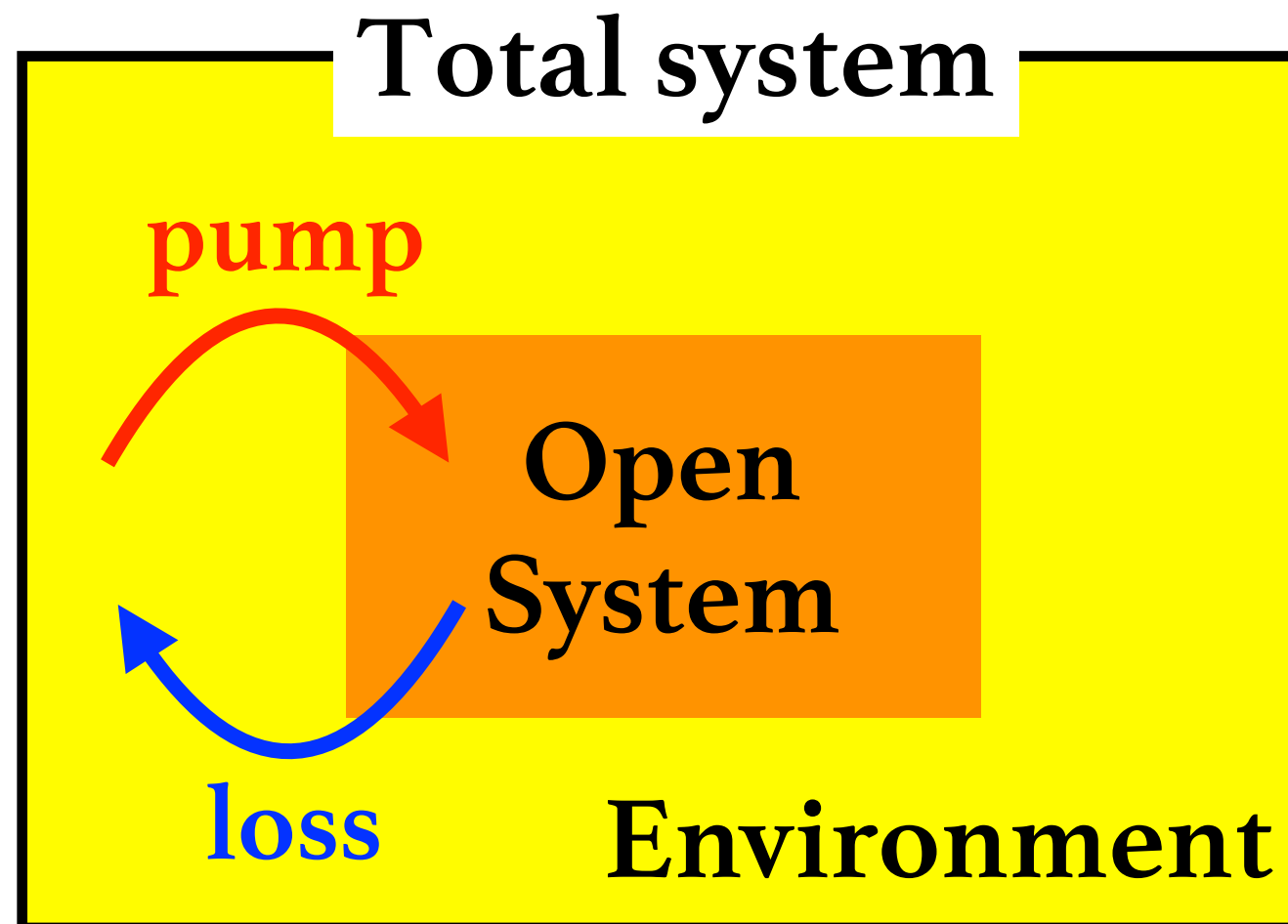


➡ 時間的に振動する凝縮 ($\equiv$ time crystal)が実現可能！

➡ このような開放系のSSBとNGモードを理解したい！！

開放系におけるNGモード！？

※ 開放系では保存電荷は外に逃げるため**非保存**



◆ 基本的な疑問 ————— [Hidaka-Minami (2018,2019), [MH](#)-Kim-Noumi-Ota (2019)]

- 対称性とその**自発的破れ**とはwell-definedか？
- 開放系にNGモードは**存在**するのか？その**性質**は？？

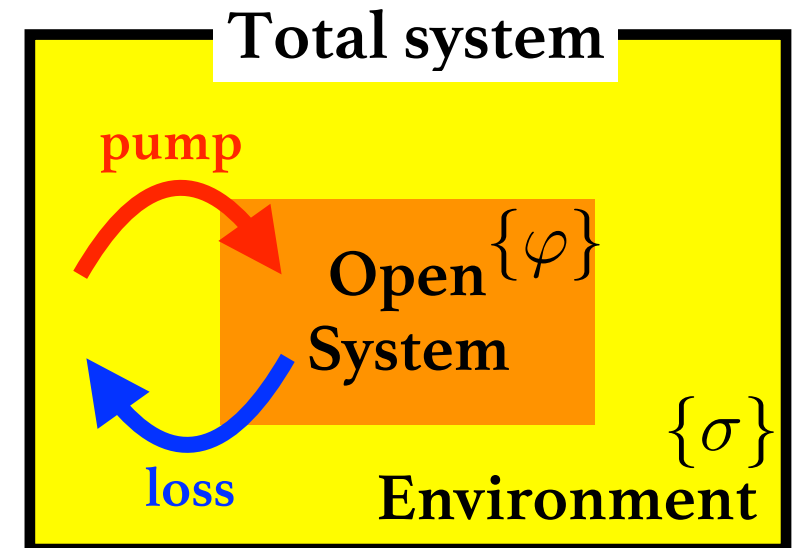
[[Holography](#): Ishigaki-Matsumoto (2020)]

やりたいこと

◆ 系の自由度

Total system
(G-inv.) = System $\{\varphi\}$ + Environment $\{\sigma\}$

$$S_{\text{tot}}[\varphi, \sigma] = S_{\text{sys}}[\varphi] + S_{\text{env}}[\sigma] + S_{\text{int}}[\varphi, \sigma]$$



◆ 対称性の自発的破れとNGモードの分類

ミクロ：基礎理論

開放系の理論 with
broken G-symmetry

ミクロな
自由度を積分

マクロ：有効理論

開放系における
NGモードの有効理論

not ゼロ温度, not 平衡系, but with 散逸!

➡ Schwinger-Keldysh(or MSR)形式!

開放系の**対称性とその破れ**

[物理量は保存しないが、対称性あり!]

Schwinger-Keldysh in a Nutshell

ゼロ温度の場の量子論

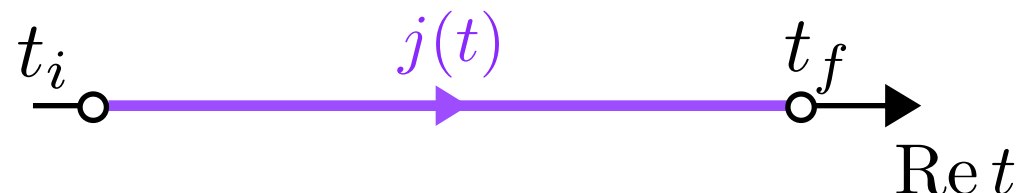
- 興味ある物理量：遷移振幅

$$\langle \text{out} | \hat{O} | \text{in} \rangle$$

$$\text{例. } S_{\beta\alpha} = \langle \beta | \hat{S} | \alpha \rangle$$

- 生成汎関数

$$Z[j] = \langle \text{vac} | \hat{U}_j | \text{vac} \rangle$$



Schwinger-Keldysh形式

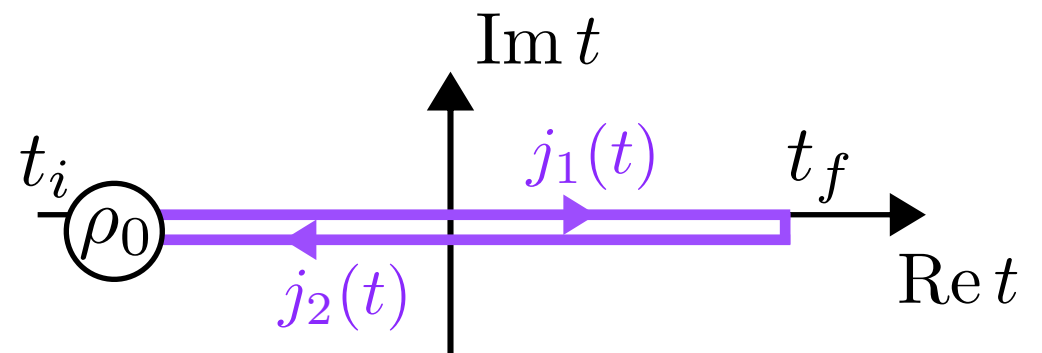
- 興味ある物理量：期待値

$$\sum_{\text{in}} \langle \text{in} | \hat{O} | \text{in} \rangle$$

$$\text{例. } \langle \hat{\varphi} \rangle = \text{Tr} (\hat{\rho}_0 \hat{\varphi})$$

- 閉経路(CTP)生成汎関数

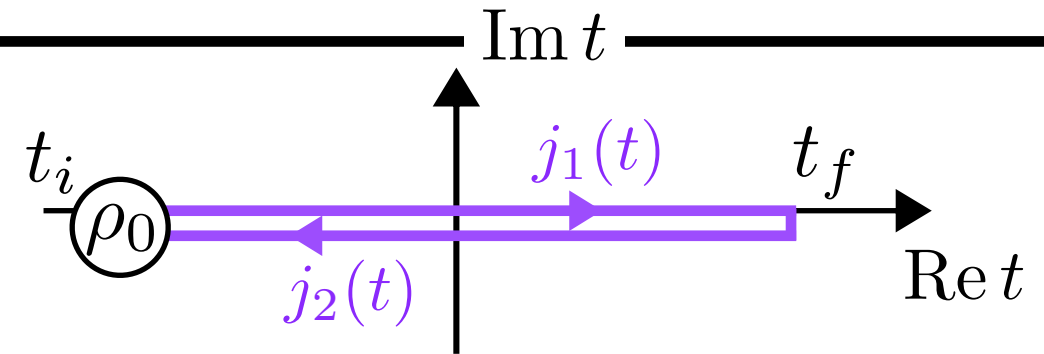
$$Z[j_1, j_2] = \text{Tr} \left(\hat{\rho}_0 \hat{U}_{j_2}^\dagger \hat{U}_{j_1} \right)$$



CTP生成汎関数の性質

◆ CTP生成汎関数

$$Z[j_1, j_2] = \text{Tr} \left(\hat{\rho}_0 \hat{U}_{j_2}^\dagger \hat{U}_{j_1} \right)$$



◆ CTP生成汎関数の基本的性質 [j : 背景ゲージ場とする]

- ① **Doubled** symmetry : $Z[j_1, j_2] = Z[j_1 + \delta_{\chi_1} j_1, j_2 + \delta_{\chi_2} j_2]$
- ② **Unitarity** condition : $Z[j_1 = j, j_2 = j] = 1$
- ③ **Reflectivity** condition : $Z[j_1, j_2]^* = Z[j_2, j_1]$

※初期時刻の密度演算子が

$$\hat{\rho}_0 = \hat{\rho}_{\text{sys}} \otimes \hat{\rho}_{\text{env}} \quad \text{with} \quad \hat{\rho}_{\text{env}} = \frac{e^{-\beta \hat{H}}}{Z} \quad \text{のときはKMS条件もつきうる}$$

NGモードの有効理論のレシピ

$$\begin{aligned} Z[j_1, j_2] &= \int \mathcal{D}\varphi_1 \mathcal{D}\varphi_2 e^{i(S[\varphi_1; j_1] - S[\varphi_2; j_2])} \rho_0(\varphi) \\ &= \int \mathcal{D}\pi_1 \mathcal{D}\pi_2 e^{iS_{\text{eff}}[\pi_1, \pi_2; j_1, j_2]} \end{aligned}$$

ミクロな
自由度を積分して、
NGモードのみ残す

◆ 有効作用 $S_{\text{eff}}[\pi_1, \pi_2]$ への要請

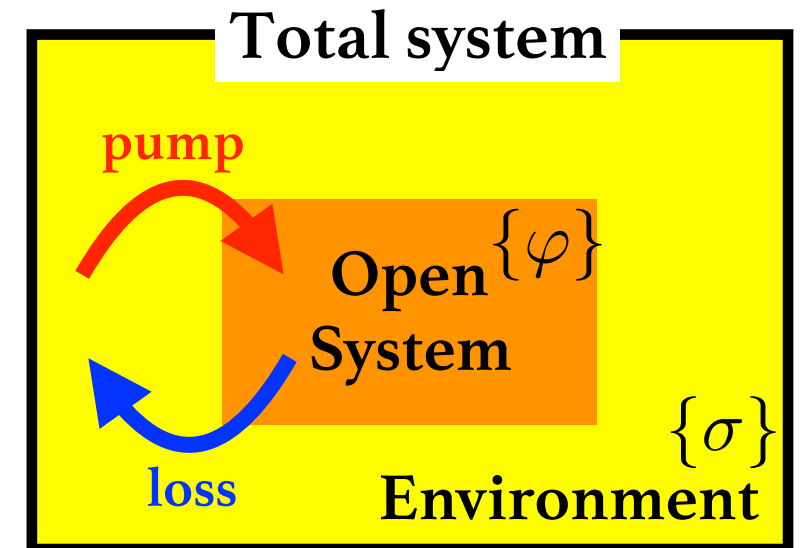
- ①' **Doubled** symmetry : **非線形**表現としてNGモードを導入(後述)
- ②' **Unitarity** condition : $S_{\text{eff}}[\pi_1 = \pi, \pi_2 = \pi] = 0$
- ③' **Reflectivity** condition : $S_{\text{eff}}[\pi_1, \pi_2]^* = -S_{\text{eff}}[\pi_2, \pi_1]$
- ③'' **Positivity** condition : $\text{Im } S_{\text{eff}}[\pi_1, \pi_2] \geq 0$

2重化された対称性の構造

◆ 系の自由度

Total system
(G-inv.) = System $\{\varphi\}$ + Environment $\{\sigma\}$

$$S_{\text{tot}}[\varphi, \sigma] = S_{\text{sys}}[\varphi] + S_{\text{env}}[\sigma] + S_{\text{int}}[\varphi, \sigma]$$



◆ 全系と開放系における2重化された対称性の構造

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}\varphi_1 \mathcal{D}\varphi_2 \mathcal{D}\sigma_1 \mathcal{D}\sigma_2 e^{i(S_{\text{tot}}[\varphi_1, \sigma_1] - S_{\text{tot}}[\varphi_2, \sigma_2])} \rho_0(\varphi, \sigma) \\ &= N \int \mathcal{D}\varphi_1 \mathcal{D}\varphi_2 e^{i(S_{\text{sys}}[\varphi_1] - S_{\text{sys}}[\varphi_2]) + i\Gamma[\varphi_1, \varphi_2]} \rho_0(\varphi) \end{aligned}$$

$S_{\text{tot}}[\varphi_1, \sigma_1] - S_{\text{tot}}[\varphi_2, \sigma_2]$ は $G_1 \times G_2 = G_R \times G_A$ 不変

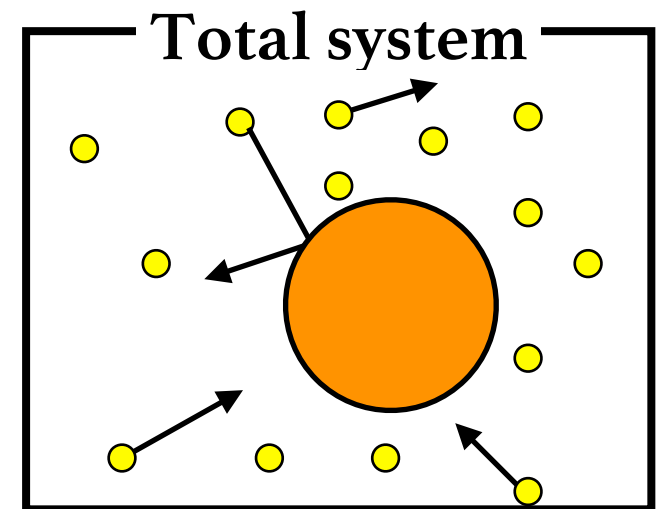
$S_{\text{sys}}[\varphi_1] - S_{\text{sys}}[\varphi_2] + \Gamma[\varphi_1, \varphi_2]$ は G_A のもとでのみ不変

例：ブラウン粒子の時間並進対称性

◆ 系の自由度

Total system (G-inv.) = **Brownian particle $\{X\}$** + **Surrounding particles $\{x_n\}$**

$$S_{\text{tot}}[X, x_n] = S_{\text{sys}}[X] + S_{\text{env}}[x_n] + S_{\text{int}}[X, x_n]$$



◆ 基本的な結果のまとめ

- CTP生成汎関数： $Z = N \int \mathcal{D}X_1 \mathcal{D}X_2 e^{iS_{\text{eff}}[X_1, X_2]} \rho_0(X)$
- ブラウン粒子の有効作用 (in a simplified case):

$$iS_{\text{eff}}[X_1, X_2] = iS_{\text{sys}}[X_1] - iS_{\text{sys}}[X_2] - \frac{1}{2} \int dt \left[i\gamma(X_1 \dot{X}_2 - X_2 \dot{X}_1) + 2\gamma T(X_1 - X_2)^2 \right]$$

- $S_{\text{eff}}[X_1, X_2]$ は $\begin{cases} X_1(t) \rightarrow X'_1(t) = X_1(t + \epsilon_R) \\ X_2(t) \rightarrow X'_2(t) = X_2(t + \epsilon_R) \end{cases}$ のもとで不変！

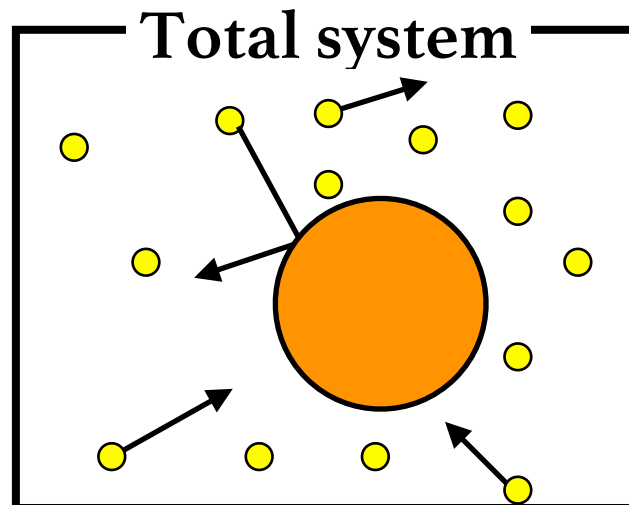
エネルギーは**保存しない**が， G_A に対応する**対称性はある**！

例：ブラウン粒子の時間並進対称性

~~GR対称性~~

~~エネルギー保存~~

$$\dot{H}_R \neq 0$$



GA対称性

時間並進は**ある**

$$\dot{H}_A = 0$$

◆ 基本的な結果のまとめ

- CTP生成汎関数： $Z = N \int \mathcal{D}X_1 \mathcal{D}X_2 e^{iS_{\text{eff}}[X_1, X_2]} \rho_0(X)$
- ブラウン粒子の有効作用 (in a simplified case):

$$iS_{\text{eff}}[X_1, X_2] = iS_{\text{sys}}[X_1] - iS_{\text{sys}}[X_2] - \frac{1}{2} \int dt \left[i\gamma(X_1 \dot{X}_2 - X_2 \dot{X}_1) + 2\gamma T(X_1 - X_2)^2 \right]$$

- $S_{\text{eff}}[X_1, X_2]$ は $\begin{cases} X_1(t) \rightarrow X'_1(t) = X_1(t + \epsilon_R) \\ X_2(t) \rightarrow X'_2(t) = X_2(t + \epsilon_R) \end{cases}$ のもとで不変！

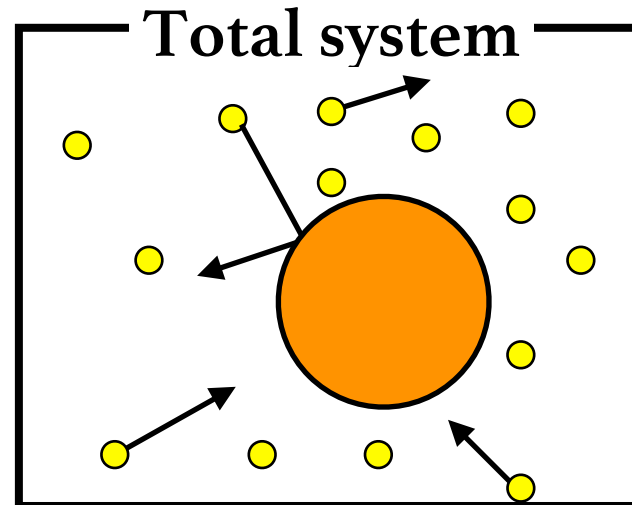
エネルギーは**保存しない**が，GAに対応する**対称性はある**！

例：ブラウン粒子の時間並進対称性

~~— G_R対称性 —~~

~~エネルギー非保存~~

~~$H_R \neq 0$~~



— G_A対称性 —

時間並進は**ある**

SSBを考えられる!!

◆ 基本的な結果のまとめ

- CTP生成汎関数： $Z = N \int \mathcal{D}X_1 \mathcal{D}X_2 e^{iS_{\text{eff}}[X_1, X_2]} \rho_0(X)$
- ブラウン粒子の有効作用 (in a simplified case):

$$iS_{\text{eff}}[X_1, X_2] = iS_{\text{sys}}[X_1] - iS_{\text{sys}}[X_2] - \frac{1}{2} \int dt \left[i\gamma(X_1 \dot{X}_2 - X_2 \dot{X}_1) + 2\gamma T(X_1 - X_2)^2 \right]$$

- $S_{\text{eff}}[X_1, X_2]$ は $\begin{cases} X_1(t) \rightarrow X'_1(t) = X_1(t + \epsilon_R) \\ X_2(t) \rightarrow X'_2(t) = X_2(t + \epsilon_R) \end{cases}$ のもとで不変！

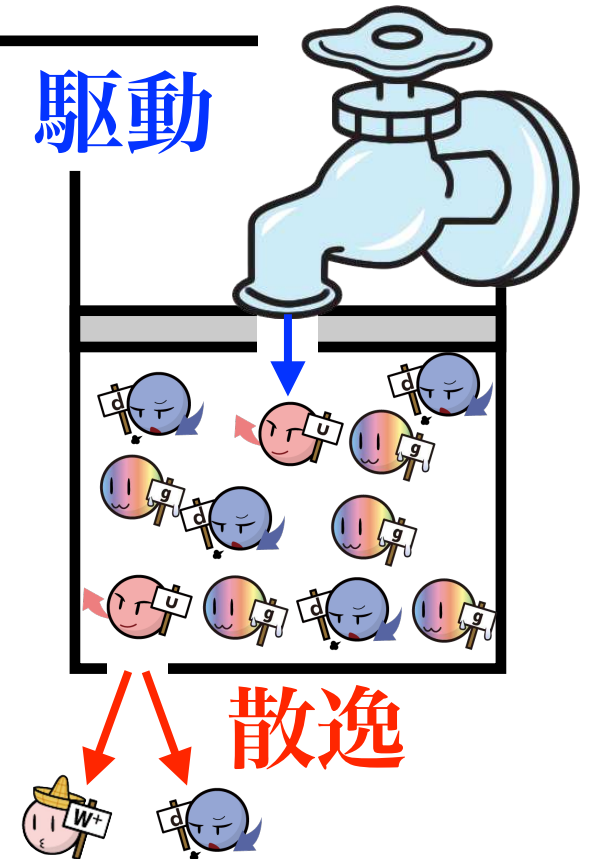
エネルギーは**保存しない**が， G_Aに対応する**対称性はある**！

開放系の有効ラグランジアン [散逸的なNGモード]

基本的な設定のまとめ

◆ ブラウン粒子から得られる教訓

- 2重化された自由度: $\{\varphi_1, \varphi_2\}$
- 対角的な要素のみ対称性あり: ~~G_R~~ $\times G_A$
- Driven-dissipativeな結合が存在しうる:
($\gamma < 0$) ($\gamma > 0$) for ブラウン粒子
(一般に, 結合定数は複素になりうる!)



➡ G_A -symmetryの自発的な破れを議論できる! [Minami-Hidaka (2018)]

例. Driven-dissipative BEC in エキシトン・ポラリトン系

- Symmetry: ~~$U(1)_R$~~ $\times U(1)_A$

開放系の特徴

$U(1)_A$ のSSB

$$G_A/H_A = U(1)_A$$

コセット構成 (CCWZの方法)

$G_A \rightarrow H_A$ という対称性の自発的破れが起きたとする！

◆ コセット： $(\xi_1(\pi), \xi_2(\pi)) \in G_1 \times G_2 / (H_1 \times H_2)$

$$\begin{cases} \xi_1 = \xi(\pi_R) e^{i\pi_A/2} \\ \xi_2 = \xi(\pi_R) e^{-i\pi_A/2} \end{cases} \quad \text{with} \quad \xi(\pi_R) = e^{i\pi_R} \quad \text{とparametrize}$$

➡
$$\begin{cases} \xi(\pi_R) \xrightarrow{G_A} g \xi(\pi_R) h^{-1}(\pi_R, g) & : \pi_R \text{は非線形表現} \\ \pi_A \xrightarrow{G_A} h(\pi_R, g) \xi(\pi_R) h^{-1}(\pi_R, g) & : \pi_A \text{は随伴表現} \end{cases}$$

◆ Maurer-Cartan 1-form： $\alpha(\pi_R) \equiv i\xi^{-1}(\pi_R) d\xi(\pi_R)$

- Broken part: $\alpha_{\perp}(\pi_R) \xrightarrow{G_A} h \alpha_{\perp}(\pi_R) h^{-1}$

- Unbroken part: $\alpha_{\parallel}(\pi_R) \xrightarrow{G_A} h \alpha_{\parallel}(\pi_R) h^{-1} + i^{-1} h dh$

開放系NGモードの有効理論

◆ Leadingの有効ラグランジアンと遅延グリーン関数

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{eff}} &= -\rho_{ab}\pi_A^a\partial_0\pi_R^b + g_{ab}^t\partial_0\pi_A^a\partial_0\pi_R^b - g_{ab}^s\nabla\pi_A^a\cdot\nabla\pi_R^b + \frac{i}{2}g_{ab}^A\pi_A^a\pi_A^b \\ &= \frac{i}{2}\begin{pmatrix}\pi_R^a & \pi_A^a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & i(g_{ab}^t\partial_0^2 - \rho_{ab}\partial_0 - g_{ab}^s\nabla^2) \\ i(g_{ab}^t\partial_0^2 + \rho_{ab}\partial_0 - g_{ab}^s\nabla^2) & g_{ab}^A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\pi_R^b \\ \pi_A^b\end{pmatrix}\end{aligned}$$

➡ 遅延グリーン関数： $(G_R^{ab})^{-1}(\omega, \mathbf{k}) = -g_{ab}^t\omega^2 - i\rho_{ab}\omega + g_{ab}^s\mathbf{k}^2$

◆ 低エネルギー係数：
[開放系に特有な項]
$$\begin{cases} \rho_{ab} \equiv m^{\alpha'} f_{\alpha' ab} + \gamma g_{ab}, & g_{ab}^A \equiv A g_{ab} \\ g_{ab}^t \equiv f^{-2} g_{ab} + \zeta_t^{\alpha'} f_{\alpha' ab}, & g_{ab}^s \equiv g_{ab} + \zeta_s^{\alpha'} f_{\alpha' ab} \end{cases}$$

ここで、 $[X_I, X_J] = iX_K f_{IJ}^K$, $\text{tr}(X_I X_J) \equiv g_{IJ}$
 $(a, b, \dots : \text{破れた対称性}, \alpha, \beta, \dots : \text{破れてない対称性} (' \text{付きはセンター}))$

- 揺らぎに関する展開 = π_A 展開の2次まで = ガウシアンノイズ
- 微分に関する展開： $\alpha = O(p^1)$, $\pi_A = O(p^0)$ として $O(p^2)$ まで

開放系NGモードの有効理論

◆ Leadingの有効ラグランジアンと遅延グリーン関数

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{eff}} &= -\rho_{ab}\pi_A^a\partial_0\pi_R^b + g_{ab}^t\partial_0\pi_A^a\partial_0\pi_R^b - g_{ab}^s\nabla\pi_A^a\cdot\nabla\pi_R^b + \frac{i}{2}g_{ab}^A\pi_A^a\pi_A^b \\ &= \frac{i}{2}\begin{pmatrix}\pi_R^a & \pi_A^a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & i(g_{ab}^t\partial_0^2 - \rho_{ab}\partial_0 - g_{ab}^s\nabla^2) \\ i(g_{ab}^t\partial_0^2 + \rho_{ab}\partial_0 - g_{ab}^s\nabla^2) & g_{ab}^A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\pi_R^b \\ \pi_A^b\end{pmatrix}\end{aligned}$$

➡ 遅延グリーン関数： $(G_R^{ab})^{-1}(\omega, \mathbf{k}) = -g_{ab}^t\omega^2 - i\rho_{ab}\omega + g_{ab}^s\mathbf{k}^2$

◆ 低エネルギー係数： $\begin{cases} \rho_{ab} \equiv m^{\alpha'} f_{\alpha'ab} + \gamma g_{ab}, \\ g_{ab}^t \equiv f^{-2} g_{ab} + \zeta_t^{\alpha'} f_{\alpha'ab}, \end{cases} \quad \begin{cases} g_{ab}^A \equiv A g_{ab} \\ g_{ab}^s \equiv g_{ab} + \zeta_s^{\alpha'} f_{\alpha'ab} \end{cases}$

[開放系に特有な項]

ここで、 $[X_I, X_J] = iX_K f_{IJ}^K, \quad \text{tr}(X_I X_J) \equiv g_{IJ}$

$(a, b, \dots : \text{破れた対称性}, \alpha, \beta, \dots : \text{破れてない対称性} (' \text{付きはセンター}))$

◆ 開放系のNGモード分類法の案 ———— [注. Hidaka-Minami (2019)とは違う]

Type-A NGモード： $\forall m^{\alpha'} = 0$ Type-B NGモード： $\exists m^{\alpha'} \neq 0$

開放系のNGモードの分散関係

遅延グリーン関数 : $(G_R^{ab})^{-1}(\omega, \mathbf{k}) = -g_{ab}^t \omega^2 - i\rho_{ab}\omega + g_{ab}^s k^2$

➡ poleの位置は $\det(G_R^{ab})^{-1}(\omega, \mathbf{k}) = 0$ を解けばわかる！

◆ Type-A NGモード ——— [例. Driven-dissipative U(1)-BEC] ———

$$\begin{aligned} \det(G_R^{ab})^{-1}(\omega, \mathbf{k}) = 0 \\ (m = \zeta_t = \zeta_s = 0) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \omega = \begin{cases} -if^2\gamma + \frac{i}{f^2\gamma}k^2 + O(k^4) & \text{:Gapped} \\ -\frac{i}{f^2\gamma}k^2 + O(k^4). & \text{:Diffusive gapless} \\ & \text{(開放系のType-A NG)} \end{cases}$$

◆ Type-B NGモード ——— [例. Dissipative-Ferromagnet] ———

$$\begin{aligned} \det(G_R^{ab})^{-1}(\omega, \mathbf{k}) = 0 \\ (\zeta_t = \zeta_s = 0) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \omega = \begin{cases} f^2(\pm m - i\gamma) + O(k^2) & \text{:Gapped} \\ \frac{\pm m - i\gamma}{m^2 + \gamma^2}k^2 + O(k^4) & \text{:Diff-prop. gapless} \\ & \text{(開放系のType-B NG)} \end{cases}$$

開放系のNGモードの分散関係

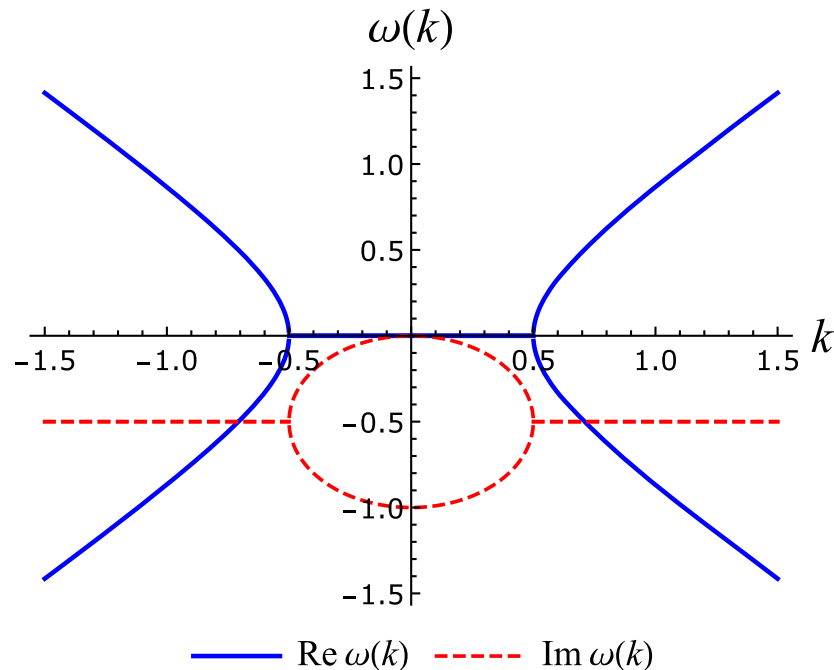
◆ Type-A NGモード

$$\omega = \begin{cases} -if^2\gamma + \frac{i}{f^2\gamma}k^2 + O(k^4) \\ -\frac{i}{f^2\gamma}k^2 + O(k^4). \end{cases}$$

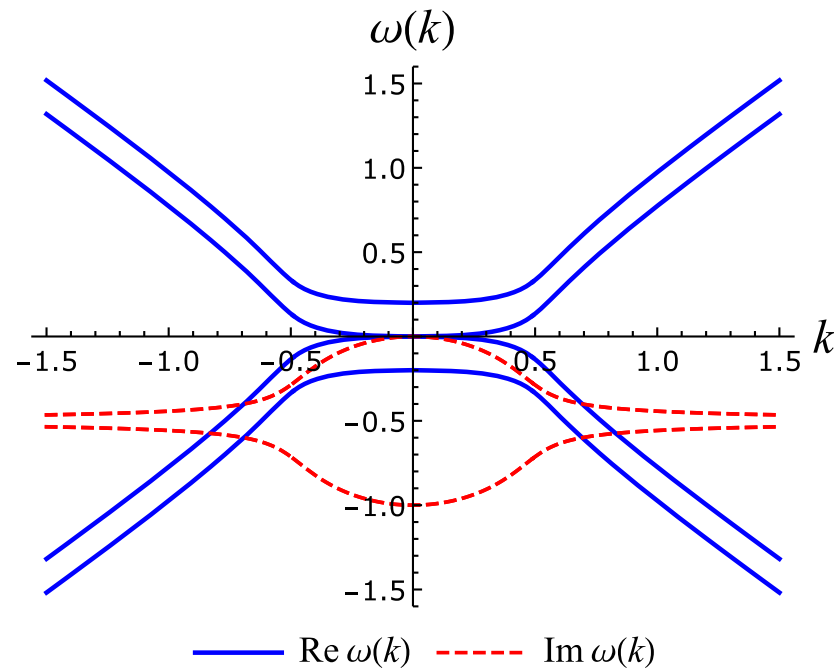
◆ Type-B NGモード

$$\omega = \begin{cases} f^2(\pm m - i\gamma) + O(k^2) \\ \frac{\pm m - i\gamma}{m^2 + \gamma^2}k^2 + O(k^4) \end{cases}$$

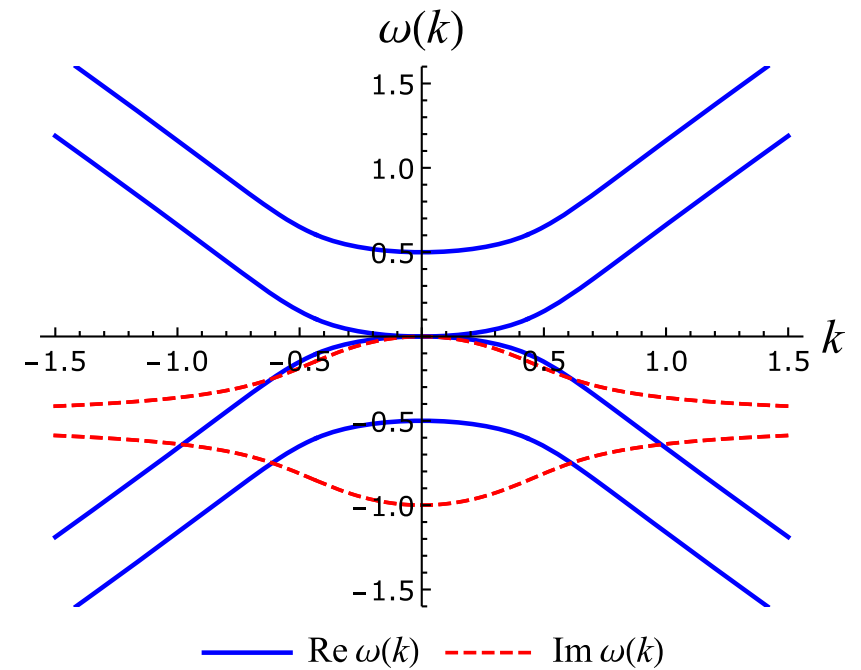
(a) Type-A NG mode: $(f, \gamma, m) = (1.0, 1.0, 0.0)$



(b) Type-B NG mode: $(f, \gamma, m) = (1.0, 1.0, 0.2)$



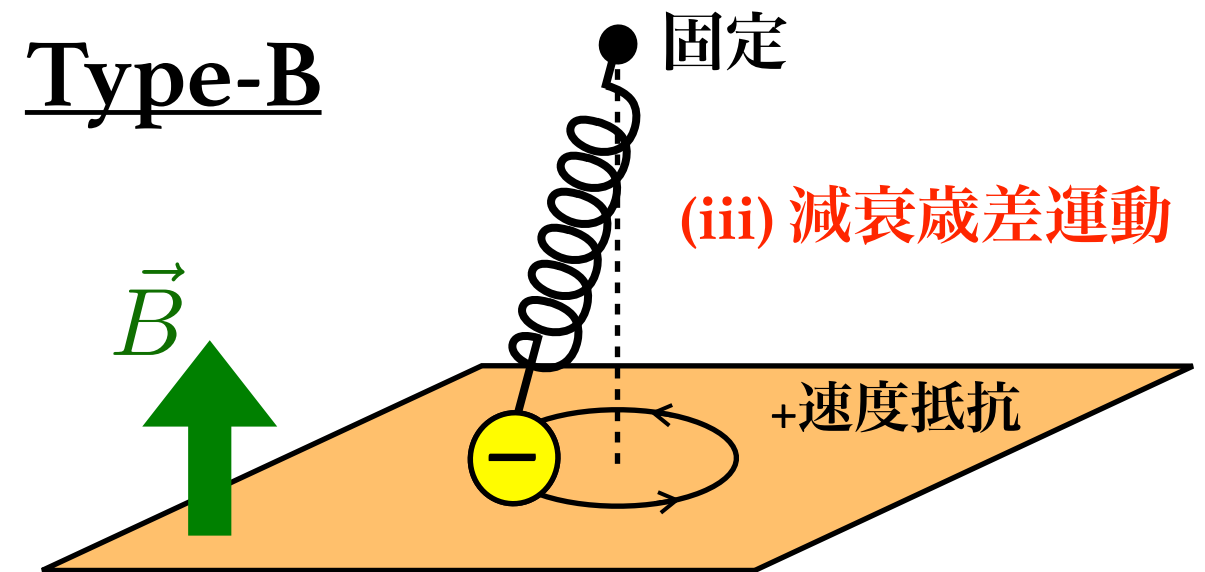
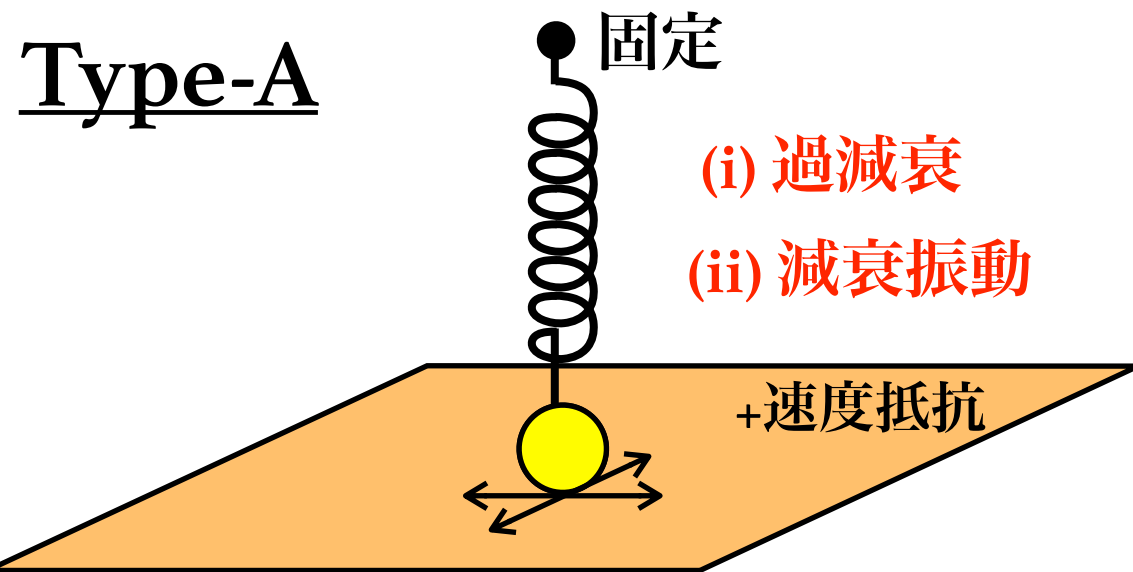
(c) Type-B NG mode: $(f, \gamma, m) = (1.0, 1.0, 0.5)$



← Type-A limit

Type-B limit →

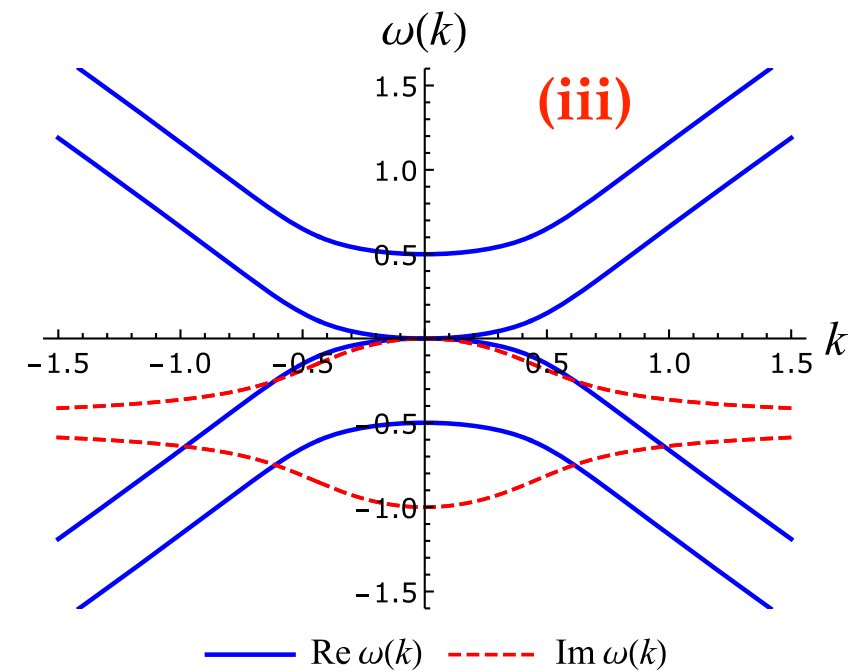
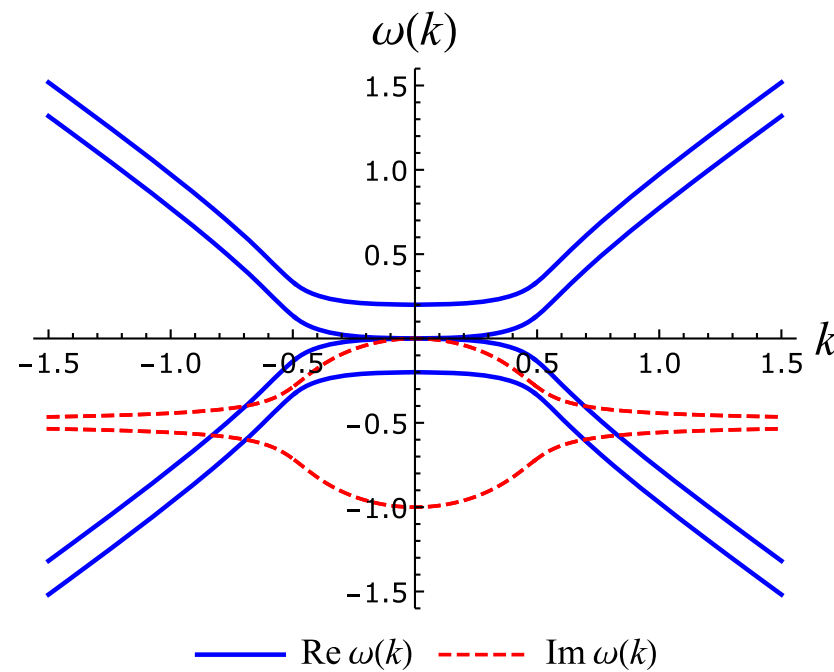
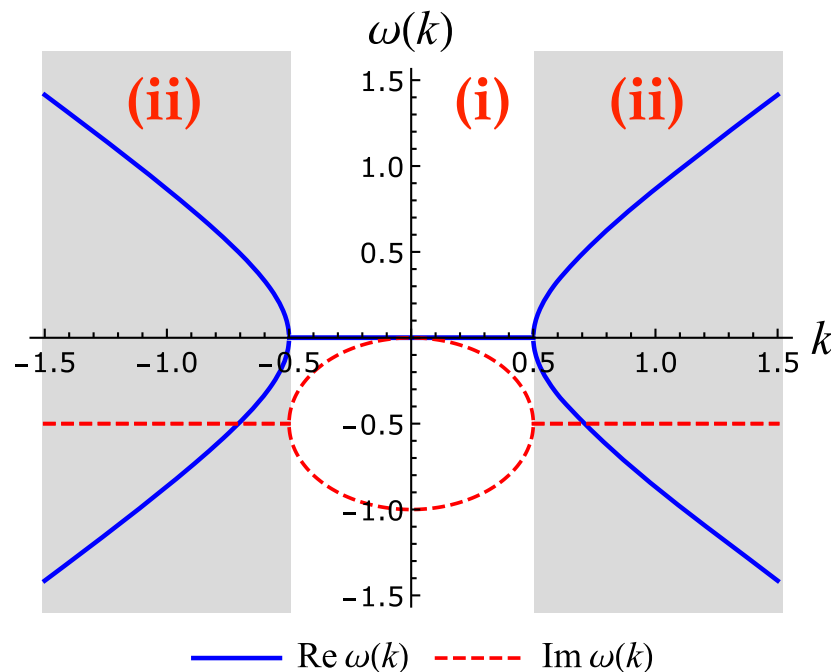
開放系のNGモードの直感的理解



(a) Type-A NG mode: $(f, \gamma, m) = (1.0, 1.0, 0.0)$

(b) Type-B NG mode: $(f, \gamma, m) = (1.0, 1.0, 0.2)$

(c) Type-B NG mode: $(f, \gamma, m) = (1.0, 1.0, 0.5)$

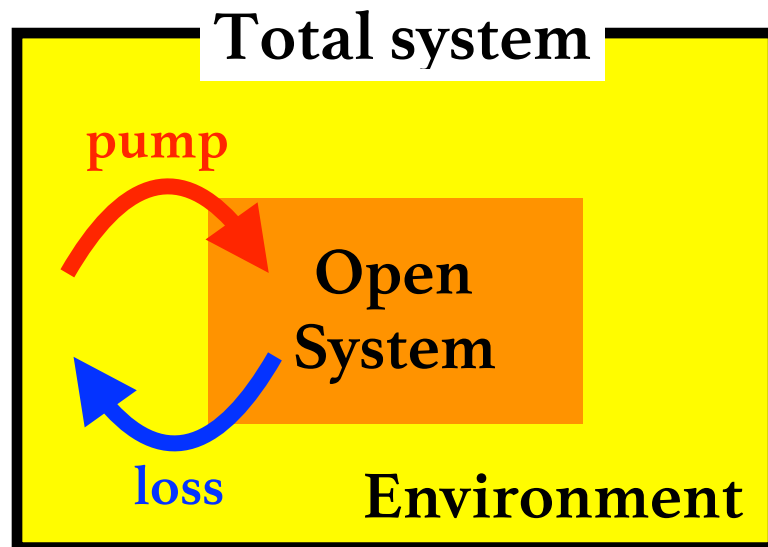


← Type-A limit

Type-B limit →

まとめと展望

◆ まとめ：開放系におけるNGモードの有効ラグランジアン $\mathcal{L}_{\text{eff}}$



- **Keldysh形式**におけるコセット構成
- 低エネルギー係数の**マッチング**
- **Diffusive NGモード**の分散関係

◆ 展望：物性系・高エネルギー物理への**いろんな応用**に加えて

$\mathcal{L}_{\text{eff}}$

☒ **Diffusive NGモード**の分散関係

☐ NGモードの**ループ補正**の影響？

☐ **時空**対称性？ **低**エネルギー定理?? ...