
量子Ising模型における新奇な非平衡量子多体現象

濱崎立資

理研CPR白眉/iTHEMS

KEK IPNS-IMSS-QUP workshop
2022/2/8 @ online

Refs.

*A. Yoshinaga, H. Hakoshima, I. Imoto, Y. Matsuzaki, and R. Hamazaki [arXiv:2111.05586]

*R. Hamazaki, Nature Communications 12, 5108 (2021).

アウトライン

Part I: イントロダクション

孤立量子多体系における熱平衡化
非平衡の量子多体現象

Part II: 弱磁場下の量子Ising模型における熱平衡化の破れ

A. Yoshinaga, H. Hakoshima, I. Imoto, Y. Matsuzaki, and [R. Hamazaki](#) [arXiv:2111.05586]

Part III: 周期駆動Ising模型における例外点的動的相転移

[R. Hamazaki](#), Nature Communications 12, 5108 (2021).

アウトライン

Part I: イントロダクション

孤立量子多体系における熱平衡化
非平衡の量子多体現象

Part II: 弱磁場下の量子Ising模型における熱平衡化の破れ

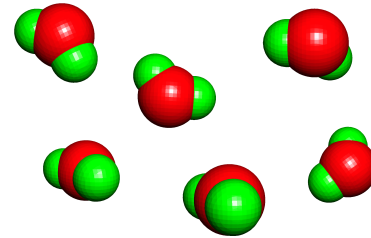
A. Yoshinaga, H. Hakoshima, I. Imoto, Y. Matsuzaki, and [R. Hamazaki](#) [arXiv:2111.05586]

Part III: 周期駆動Ising模型における例外点的動的相転移

[R. Hamazaki](#), Nature Communications 12, 5108 (2021).

非平衡統計力学の舞台としての人工量子系

平衡量子統計力学



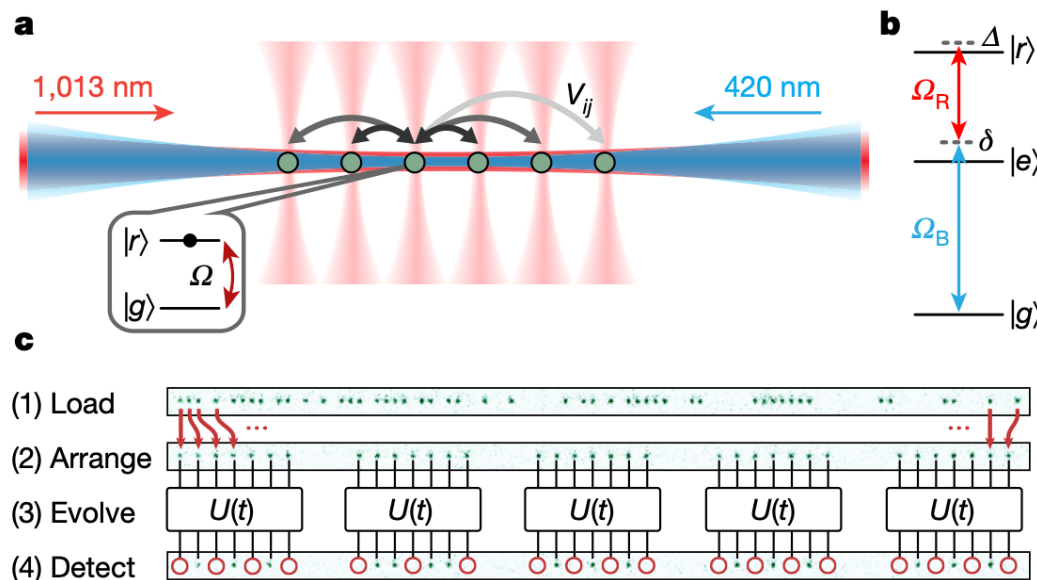
$$\xrightarrow{\frac{e^{-\beta H}}{Z}}$$



非平衡量子統計力学を理解したい

人工量子系（冷却原子系など）：非平衡現象の探索の舞台

ミクロな自由度を制御 → 多体ダイナミクスの観測



1原子レベルでの測定
& リアルタイムでの制御

H. Bernien et al., Nature (2017)

孤立量子系は熱平衡化するか？

$$\langle \psi(0) | \hat{O} | \psi(0) \rangle \xrightarrow{\text{ユニタリー時間発展 (量子力学)}} \text{Tr}[\hat{\rho}_{\text{mic}} \hat{O}]$$

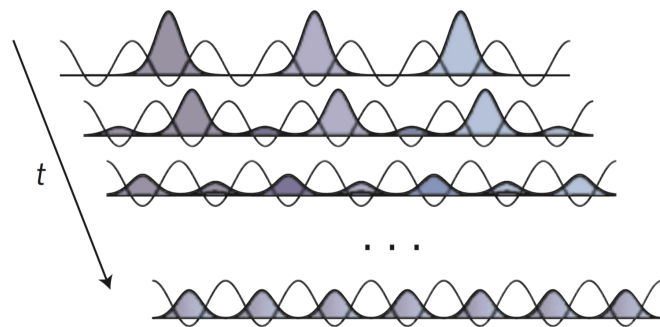
ミクロカノニカル分布 (平衡統計力学)

von Neumannに始まる問題 (1929)



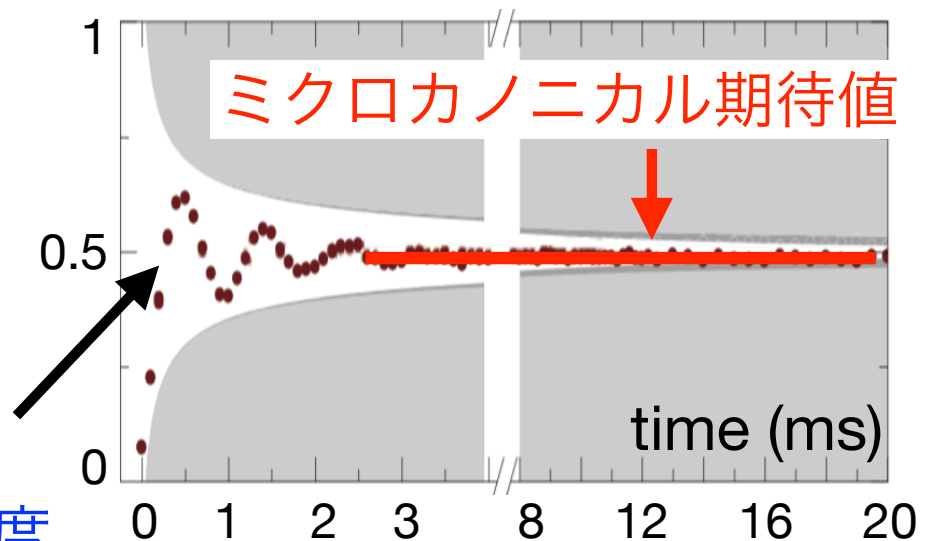
https://en.wikipedia.org/wiki/John_von_Neumann#/media/File:JohnvonNeumann-LosAlamos.gif

実験的な観測



S. Trotzky et al., Nat. Phys.(2012). $\mathcal{O}(t)$

奇数サイトの粒子密度



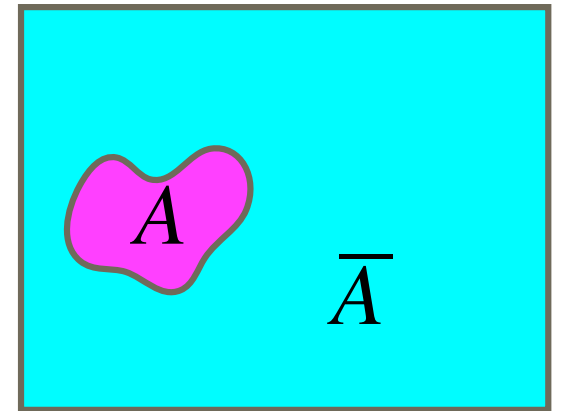
Eigenstate thermalization hypothesis (ETH)

ETH (熱平衡化の十分条件) :

ハミルトニアンエネルギー固有状態 $|E_\alpha\rangle$ 全てが「熱的」興味あるエネルギースケールに属する任意の $|E_\alpha\rangle$ と任意の局所領域 A について、

$$\text{Tr}_{\bar{A}}[|E_\alpha\rangle\langle E_\alpha|] \simeq \text{Tr}_{\bar{A}}[\hat{\rho}_{\text{mic}}(E_\alpha)]$$

← A への縮約密度行列



→ 固有状態のエンタングルメントエントロピーの体積則なども従う

$$S_A(|E_\alpha\rangle) \propto V_A$$

*局所保存則がある場合、その値を指定した部分空間内で議論
(粒子数保存や電荷保存など)

* (相互作用距離が長すぎない) 典型的な多体系での数値的検証

S. Sugimoto, [R. Hamazaki](#), M. Ueda, Phys. Rev. Lett. 126 (12), 120602 (2021).

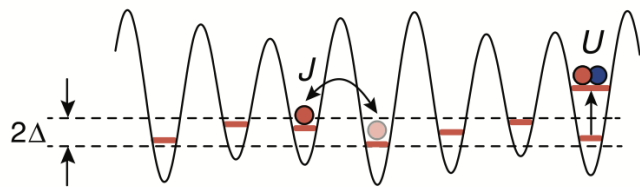
S. Sugimoto, [R. Hamazaki](#), M. Ueda, arXiv:2111.12484

非平衡多体現象

ETHを超えた非自明な非平衡物理を探索したい！

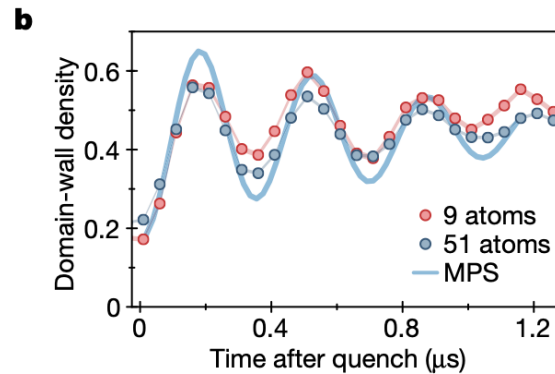
①熱平衡化しない系（ETHの破れ）

Many-body localization
(MBL)



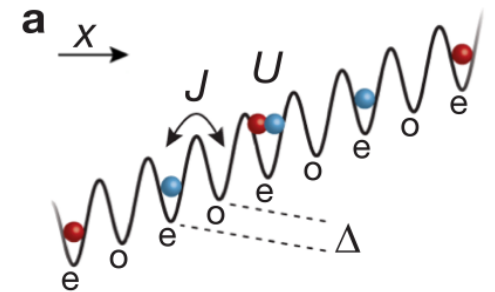
M. Schreiber et al.,
Science (2015)

量子多体スカー



H. Bernien et al.,
Nature (2017)

Stark MBL
cf. ヒルベルト空間分割



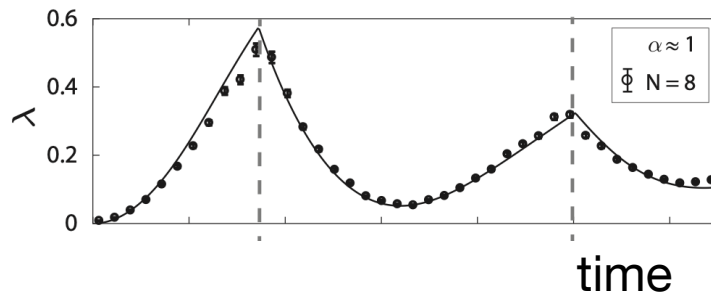
S. Scherg et al.,
Nat. Commun. (2021)

非平衡多体現象

ETHを超えた非自明な非平衡物理を探索したい！

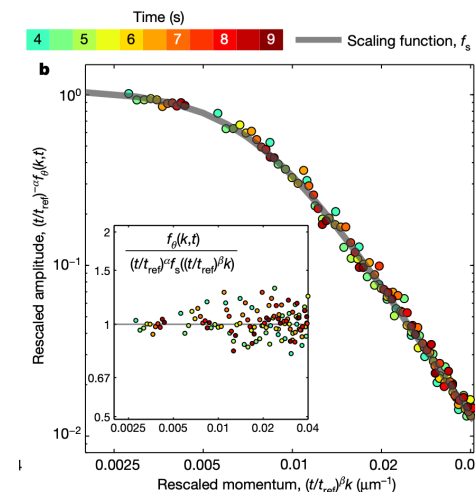
②緩和過程における新奇な物理

動的量子相転移



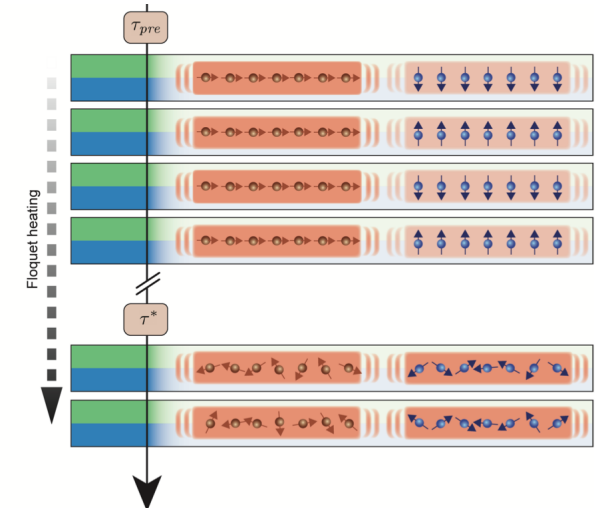
P. Jurcevic et al., PRL (2017)

動的スケーリング



M. Prüfer et al., Nature (2018)

プレサーマル時間結晶



A. Kyprianidis et al.,
Science (2021)

本発表の主題

量子多体系の最も基本的なモデルの一つである、
量子Ising模型における新奇な非平衡多体現象を議論する

* d 次元量子Ising模型 ($d \geq 2$)

$$\hat{H} = \sum_{\langle i,j \rangle} J \hat{\sigma}_i^z \hat{\sigma}_j^z + \sum_i h_x \hat{\sigma}_i^x$$

$J \sim h_x$ で熱平衡化 ($d=2$ の数値計算)

*周期駆動一次元量子Ising模型

$$\hat{U} = e^{-i \sum_{j=1}^L h_x \sigma_j^x} e^{-i \sum_{j=1}^L J \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z} e^{-i \sum_{j=1}^L h_z \sigma_j^z}$$

$h_x, h_z \neq 0$ なら熱平衡化

弱磁場極限 $h_x/J \rightarrow 0$ での
ヒルベルト空間分割による
熱平衡化の破れ

例外点に起因した
新しい普遍性を持つ
動的量子相転移の発見

アウトライン

Part I: イントロダクション

孤立量子多体系における熱平衡化
非平衡の量子多体現象

Part II: 弱磁場下の量子Ising模型における熱平衡化の破れ

A. Yoshinaga, H. Hakoshima, I. Imoto, Y. Matsuzaki, and [R. Hamazaki](#) [arXiv:2111.05586]

Part III: 周期駆動Ising模型における例外点的動的相転移

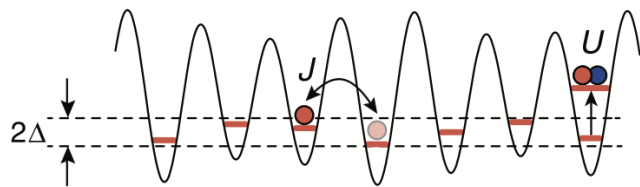
[R. Hamazaki](#), Nature Communications 12, 5108 (2021).

非平衡多体現象

ETHを超えた非自明な非平衡物理を探索したい！

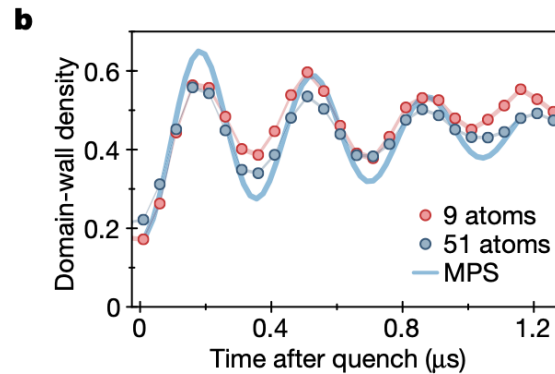
①熱平衡化しない系（ETHの破れ）

Many-body localization
(MBL)



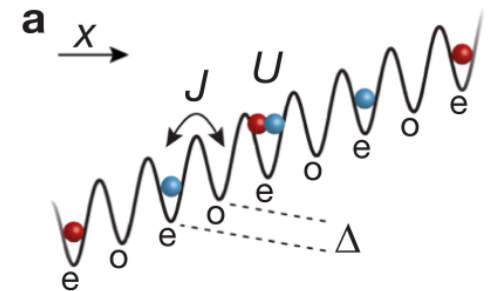
M. Schreiber et al.,
Science (2015)

量子多体スカー



H. Bernien et al.,
Nature (2017)

Stark MBL
cf. **ヒルベルト空間分割**



S. Scherg et al.,
Nat. Commun. (2021)

ヒルベルト空間分割 (HSF)

スピン1模型

$$\hat{H} = - \sum_n \left[S_n^+ (S_{n+1}^-)^2 S_{n+2}^+ + \text{H.c.} \right]$$

S. Pai et al., PRX (2019); P. Sala et al., PRX (2020)

許される遷移

$$|\dots 0 + 0 \dots\rangle \leftrightarrow |\dots + - + \dots\rangle$$

$$|\dots - + 0 \dots\rangle \leftrightarrow |\dots 0 - + \dots\rangle$$

$$|\dots 0 + - \dots\rangle \leftrightarrow |\dots + - 0 \dots\rangle$$

$$|\dots - + - \dots\rangle \leftrightarrow |\dots 0 - 0 \dots\rangle$$

局所保存量は $\hat{H}$ 以外に二つのみ

$$\hat{Q} = \sum_{i=1}^L \hat{S}_i^z \quad \hat{P} = \sum_{i=1}^L (i - i_0) \hat{S}_i^z$$

“電荷” “双極子モーメント”

保存量である $\hat{H}, \hat{Q}, \hat{P}$ の値を指定すればETH・熱平衡化が成立するか？

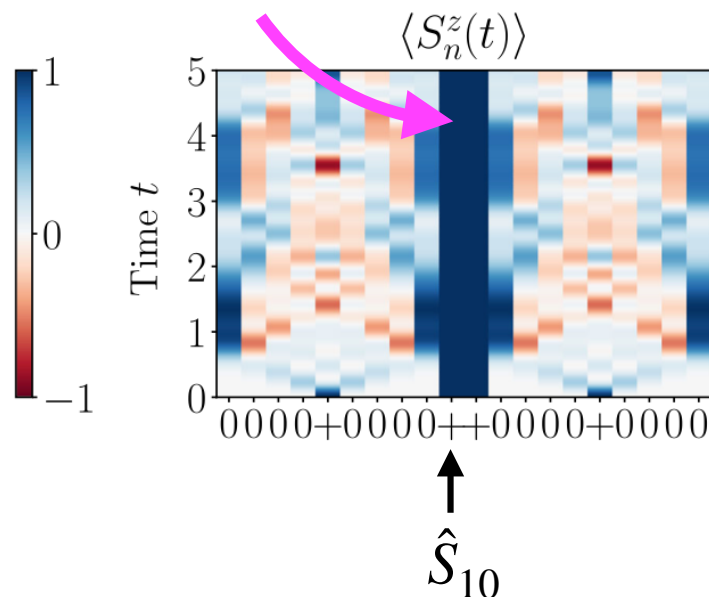
ヒルベルト空間分割 (HSF)

$\hat{H}, \hat{Q}, \hat{P}$ の値を指定すればETH・熱平衡化が成立するか？

No! 局所保存量を指定しても熱平衡化は起こるとは限らない

S. Pai et al., PRX (2019); P. Sala et al., PRX (2020)

系が空間的に分割される



$|\psi_A\rangle: |0000+0000++0000+0000\rangle$

→ 壁が時間発展でも不変 (凍る)

$|\psi_B\rangle: |0000++0-0++0-0++0000\rangle$

→ 壁が時間発展で溶ける

$\langle \hat{H} \rangle_A = \langle \hat{H} \rangle_B, \langle \hat{Q} \rangle_A = \langle \hat{Q} \rangle_B, \langle \hat{P} \rangle_A = \langle \hat{P} \rangle_B$ だが

$1 = \overline{\langle \hat{S}_{10} \rangle_A} \neq \overline{\langle \hat{S}_{10} \rangle_B}$ 初期状態依存性！

$\overline{}$: 長時間平均

$|\psi_A\rangle$ と $|\psi_B\rangle$ が時間発展で張る部分空間は分離している

ヒルベルト空間分割 (HSF)

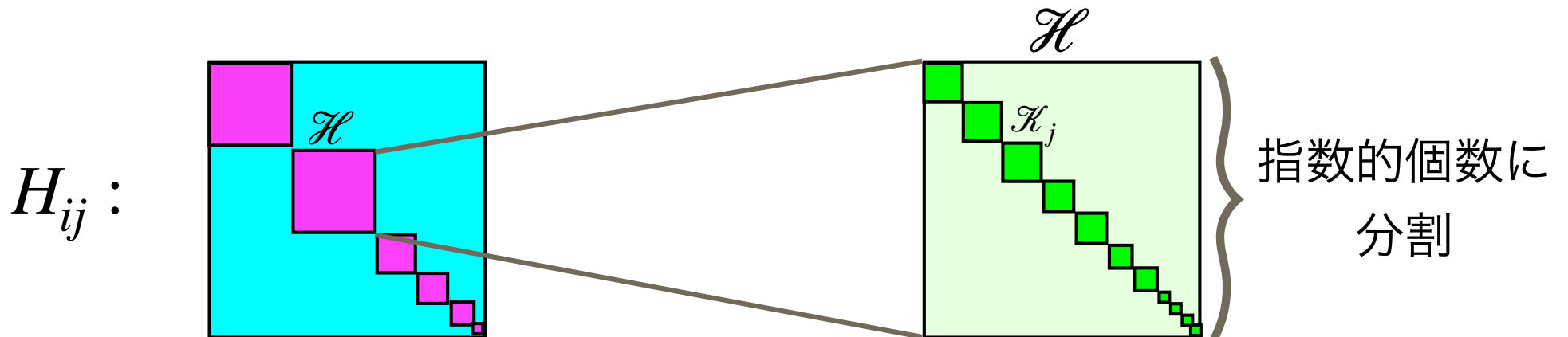
(局所保存量を指定した後の) ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ が、
初期product stateの時間発展により張られる
指数的な個数の部分空間に分割

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{j=1}^K \mathcal{K}_j$$

$$\mathcal{K}_j = \text{span}_t \{ e^{-i\hat{H}t} |\psi_j\rangle \}$$

$|\psi_j\rangle$: product state

$K \sim \exp(\mathcal{O}(N)) \rightarrow$ Hilbert空間分割



局所保存量によるブロック対角化

HSFによるブロック対角化

HSFは量子Ising模型でも起こるか？

量子Ising模型で有効的にHSFが生じるか？

先行研究のHSFのほとんどは保存量が
(エネルギー以外に) 二個以上必要だが、
より少ない局所保存量でもHSFは生じるか？

結果

Yes. 弱磁場下の横磁場Ising模型 (次元 $d \geq 2$) で、
局所保存量が (エネルギー以外に)
一つだけであるHSFが生じ、非熱的ダイナミクスを示す

モデルとセットアップ

横磁場Ising模型

ドメイン壁のエネルギー

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{DW}} + h_x \sum_i \hat{\sigma}_i^x$$

$$\hat{H}_{\text{DW}} = - \sum_{\langle i,j \rangle} \hat{\sigma}_i^z \hat{\sigma}_j^z$$

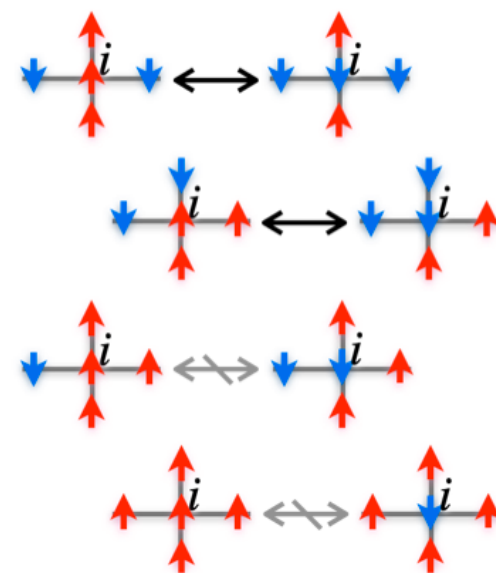
$d \geq 2$ なら $h_x \sim 1$ の時、非可積分的...ETH & 熱平衡化

弱磁場極限 $h_x \rightarrow 0$ での

実効モデル (やはり非可積分)

$$\hat{H}_1 = \hat{H}_{\text{DW}} + h_x \sum_i \hat{\sigma}_i^x \hat{Q}_i$$

$\hat{Q}_i$: サイト i の周りの磁化の和がゼロなら1,
それ以外は0への射影



ダイナミクスは非自明な制限を受ける

モデルとセットアップ

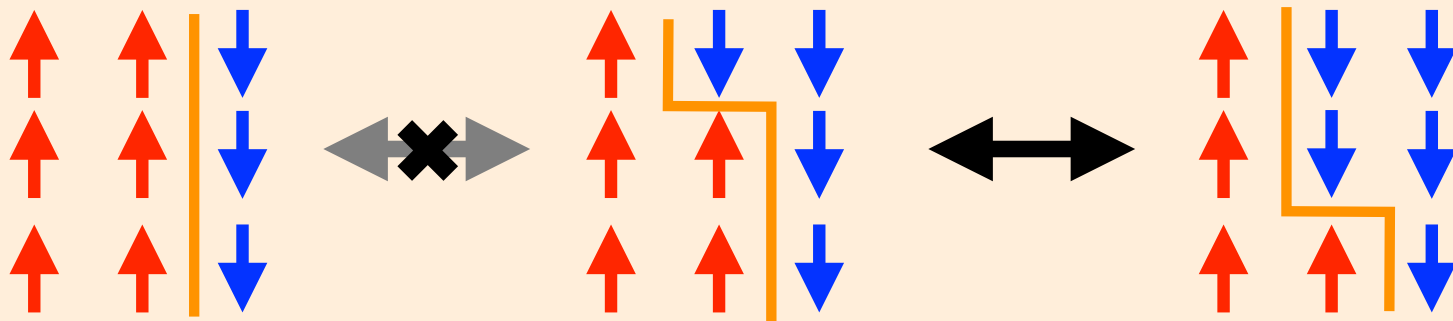
横磁場Ising模型

$$\hat{H} = \sum_i \hat{H}_i + \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} \hat{\sigma}_i^x \hat{\sigma}_j^x + \sum_i \hat{H}_i^z$$

$\hat{H}_{\text{DW}}$ が横磁場に比べ、支配的で保存する

(エネルギー以外に局所保存量は $\hat{H}_{\text{DW}}$ のみ)

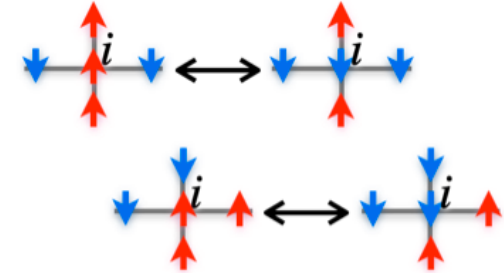
「ドメイン壁」のエネルギーを変えない遷移のみ存在



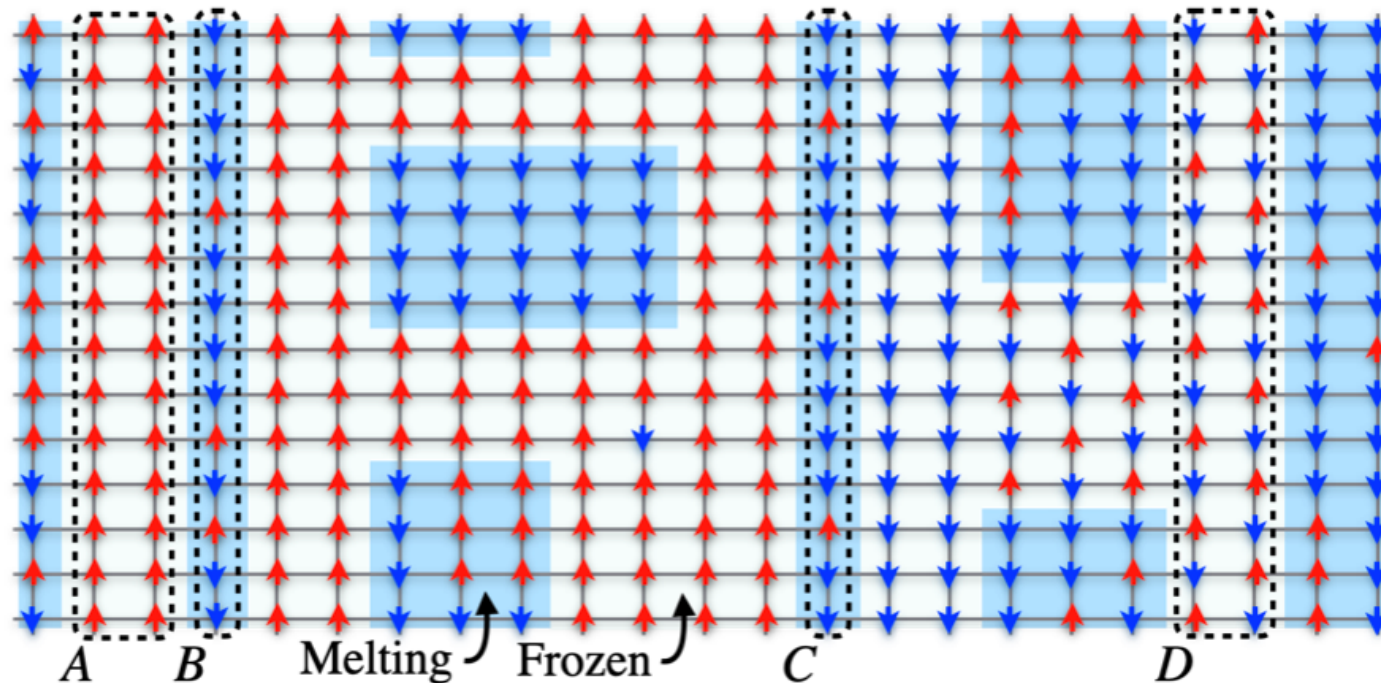
ダイナミクスは非自明な制限を受ける

凍った領域

$$\hat{H}_1 = \hat{H}_{\text{DW}} + h_x \sum_i \hat{\sigma}_i^x \hat{Q}_i$$



ダイナミクスの制限により、
動かない（凍った）領域が存在し、系を空間的に分断

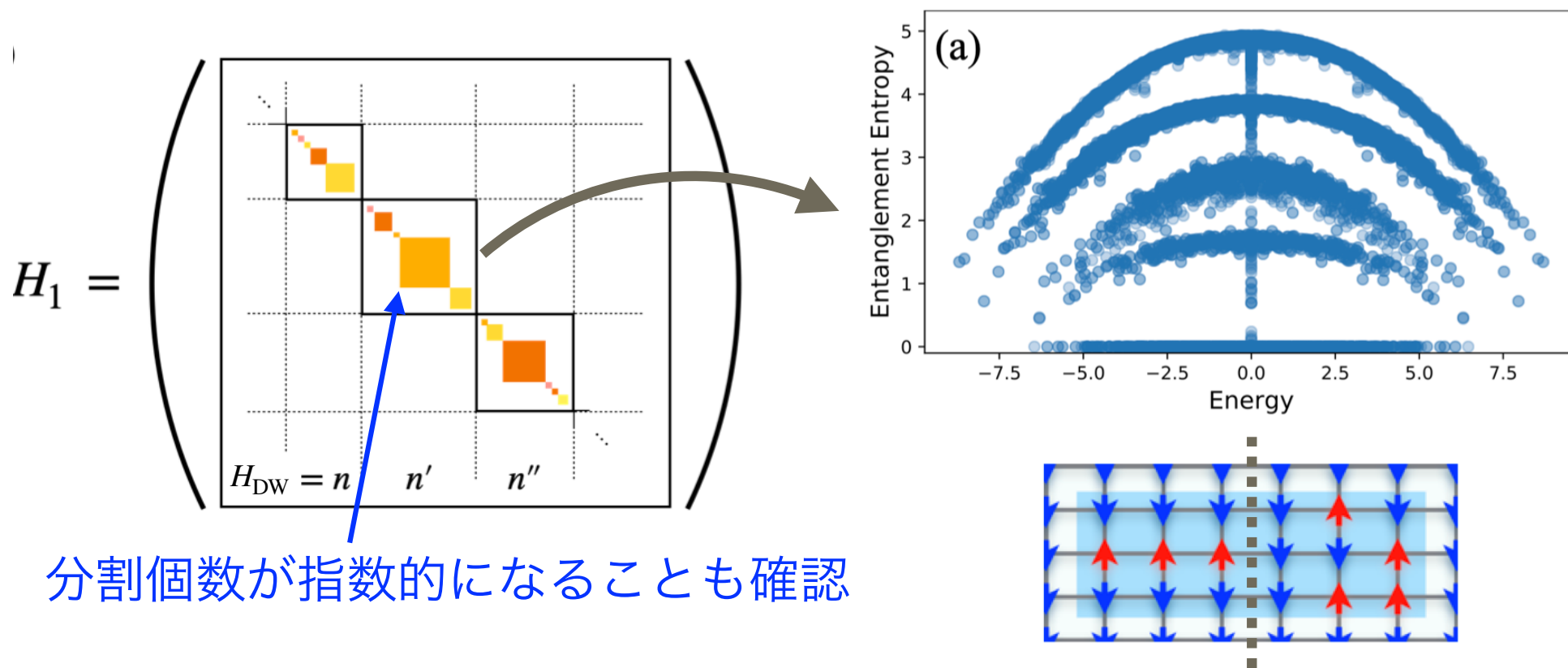


Hilbert-space fragmentationとETHの破れ

凍った領域による空間の分断により、HSFが起こる

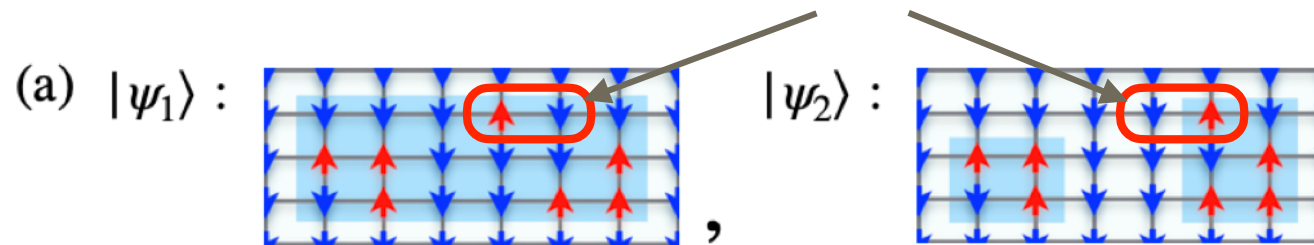
($\hat{H}_{\text{DW}}$ の保存量を指定しても、ETHが破れる)

→ Volume lawを満たさない低エンタングルド固有状態



非熱的なダイナミクス

ドメイン壁のエネルギー、全エネルギーが同じ値となる
二つの初期状態の時間発展



Part IIのまとめ

弱磁場極限の高次元量子Ising模型において、
（エネルギー以外に）局所保存量が一つのみで
ヒルベルト空間分割が起こることを示した

ヒルベルト空間分割により、ETHが破れ、
初期状態に大きく依存したダイナミクスが起こる

アウトライン

Part I: イントロダクション

孤立量子多体系における熱平衡化
非平衡の量子多体現象

Part II: 弱磁場下の量子Ising模型における熱平衡化の破れ

A. Yoshinaga, H. Hakoshima, I. Imoto, Y. Matsuzaki, and [R. Hamazaki](#) [arXiv:2111.05586]

Part III: 周期駆動Ising模型における例外点的動的相転移

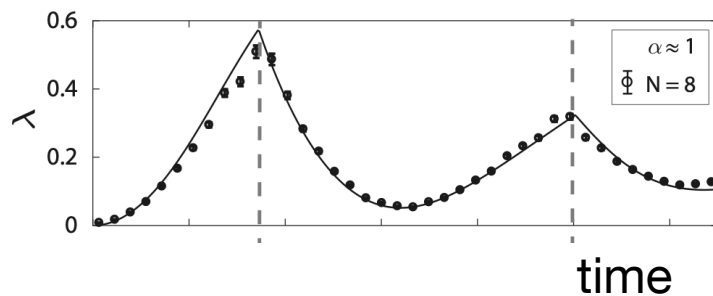
[R. Hamazaki](#), Nature Communications 12, 5108 (2021).

非平衡多体現象

ETHを超えた非自明な非平衡物理を探索したい！

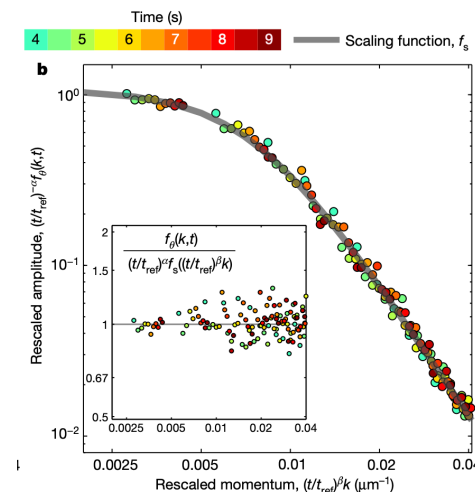
②緩和過程における新奇的な物理

動的量子相転移



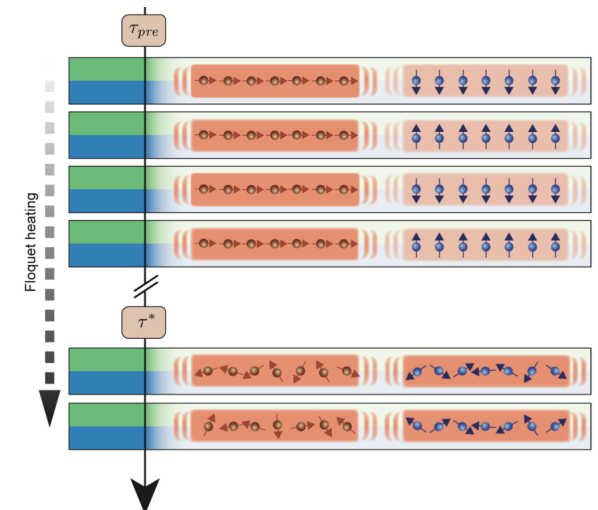
P. Jurcevic et al., PRL (2017)

動的スケーリング



M. Prüfer et al., Nature (2018)

プレサーマル時間結晶



A. Kyprianidis et al., Science (2021)

「動的」自由エネルギー

非平衡状態と、ある状態の重なり $\langle \psi_f | \psi(t) \rangle = \langle \psi_f | e^{-iHt} | \psi_i \rangle$

動的自由エネルギー

$$F = -\frac{1}{L} \log |\langle \psi_f | e^{-iHt} | \psi_i \rangle|$$

[M. Heyl et al. Phys. Rev. Lett. 110, 135704 (2013)]

*平衡自由エネルギーに類似

$$F_{\text{eq}} = -\frac{1}{L} \log \text{Tr}[e^{-\beta H}]$$

*解析接続 $\beta \rightarrow it$

一般化期待値

$$\langle A \rangle_{\text{gexp}} = \frac{\langle \psi_f | A e^{-iHt} | \psi_i \rangle}{\langle \psi_f | e^{-iHt} | \psi_i \rangle}$$

[E. Canovi et al., Phys. Rev. Lett. 113, 265702 (2014)]

$$\text{cf) } \langle A \rangle = \frac{\text{Tr}[A e^{-\beta H}]}{\text{Tr}[e^{-\beta H}]}$$

通常の局所物理量の期待値ではないが
干渉実験などで原理的にアクセス可能な量

動的量子相転移(DQPT)

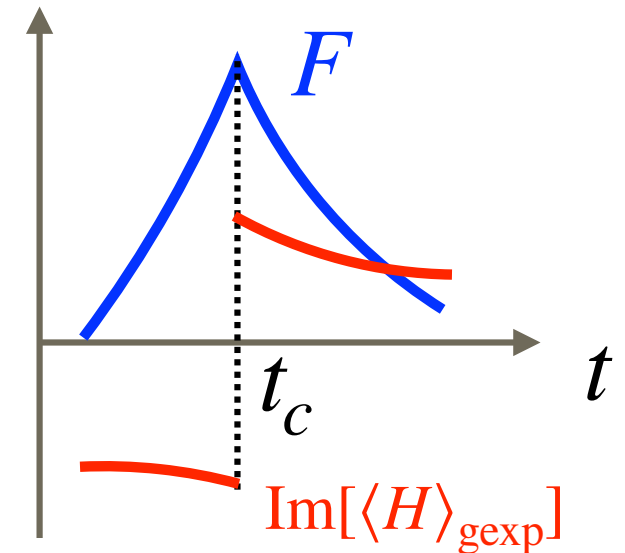
DQPT: 熱力学極限における動的自由エネルギー F の特異性

[M. Heyl et al. Phys. Rev. Lett. 110, 135704 (2013)]

典型的な例：

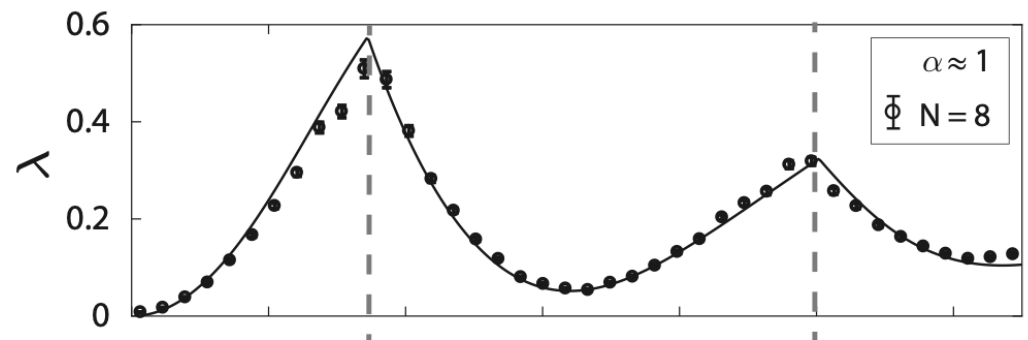
F が時間の関数としてカスプを持つ

cf) $\text{Im}[\langle H \rangle_{\text{gexp}}] = -\frac{dF}{dt}$ はジャンプ



実験的検証

*イオン系



[P. Jurcevic et al., Phys. Rev. Lett. 119, 080501 (2017)]

研究の目的

DQPTの有限時間での相転移とみなせるが、未知な点が多い
対称性の破れやそれに伴う普遍性は存在するか？

結果

Yes. 周期駆動された量子Isingモデルにおいて、
非ユニタリ行列に特有の「対称性の自発的破れ」により、
例外点に起因した普遍性を伴うDQPTが起こる

研究の目的

DQPTの有限時間での相転移とみなせるが、未知な点が多い
対称性の破れやそれに伴う普遍性は存在するか？

結果

Yes. 周期駆動された量子Isingモデルにおいて、
非ユニタリ行列に特有の「対称性の自発的破れ」により、
例外点に起因した普遍性を伴うDQPTが起こる
「時空間双対」に非ユニタリ性が潜む！

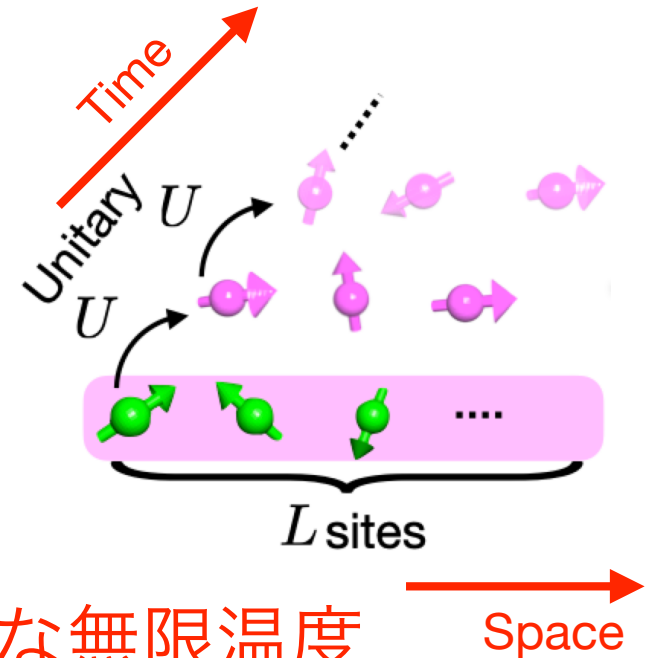
モデルとセットアップ

周期駆動された一次元系

$$|\psi(T)\rangle = U^T |\psi\rangle$$

$$U = e^{-i \sum_{j=1}^L b \sigma_j^x} e^{-i \sum_{j=1}^L J \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z - i \sum_{j=1}^L h \sigma_j^z}$$

スピン回転 イジング相互作用
+ 縦磁場



(フロケ) ETHを満たす → 定常状態は自明な無限温度

動的自由エネルギー

$$F_{L,T}^{\downarrow\uparrow} = -\frac{1}{L} \log |\langle \downarrow \cdots \downarrow | U^T | \uparrow \cdots \uparrow \rangle|$$

一般化期待値

$$\langle A \rangle_{\text{gexp}} = \frac{\text{Tr}[A U^T]}{\text{Tr}[U^T]}$$

$$F_{L,T}^s = -\frac{1}{L} \log |\overline{\langle \psi | U^T | \psi \rangle}| = -\frac{1}{L} \log |\text{Tr}[U^T]| + \log 2 \quad (\text{初期状態平均})$$

[R. Hamazaki, Nature Communications 12, 5108 (2021).]

周期駆動Ising系におけるDQPT

熱力学極限において、 $J = -\frac{\pi}{4}$ に固定、 b を変化させる

$F_{\infty,T}^s$ に多くの特異性があるが、 $b = b_c \simeq 0.026\pi$ でのみ

微分($\propto \text{Im}[\langle \sigma_1^x \rangle_{\text{gexp}}]$)が発散

例外点的DQPT:

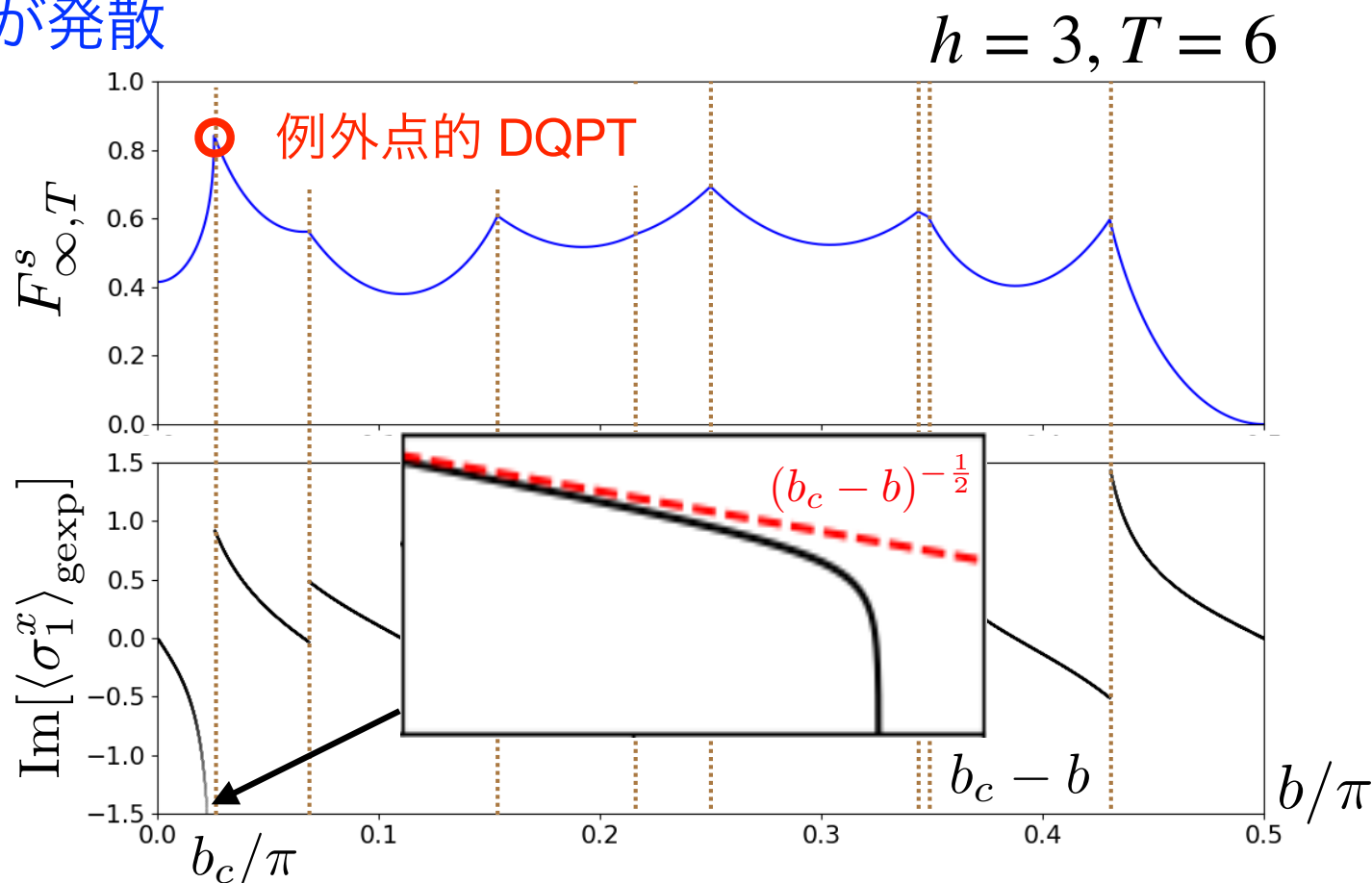
臨界点周りで

$$\frac{\partial F_{\infty,T}^s}{\partial b} \sim (b_c - b)^{-\frac{1}{2}}$$

$[b < b_c \text{のみ}]$

通常のDQPTでは

$\frac{\partial F_{\infty,T}^s}{\partial b}$ はジャンプのみ示す



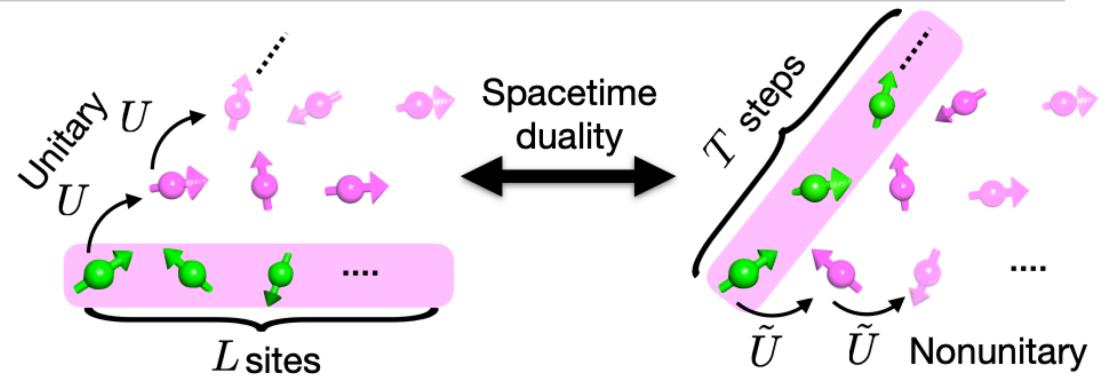
[R. Hamazaki, Nature Communications 12, 5108 (2021).]

時空間双対性

多体の転送行列を用いた
厳密なマッピング

[M. Akila et al. J Phys. A (2016)]

[B. Bertini et al. PRL (2018)]



$$F_{L,T}^s = -\frac{1}{L} \log \left| \frac{\text{Tr}[U^T]}{2^L} \right|$$

$$= -\frac{1}{L} \log |\text{Tr}[\tilde{U}^L]|$$

$$\text{Tr}[U^T] = \left(\frac{\sin 2b}{2i} \right)^{LT/2} \sum_{\{s_{\tau,j}\}} e^{-i \sum_{\tau=1}^T \sum_{j=1}^L (J s_{\tau,j} s_{\tau,j+1} + J' s_{\tau,j} s_{\tau+1,j} + h s_{\tau,j})}$$

(二次元・古典分配関数)

$$\tilde{U} = C e^{-i \sum_{\tau=1}^T \tilde{b} \sigma_{\tau}^x} e^{-i \sum_{\tau=1}^T \tilde{J} \sigma_{\tau}^z \sigma_{\tau+1}^z} e^{-i \sum_{\tau=1}^T h \sigma_{\tau}^z}$$

$$\tilde{b} = -\pi/4 - i \log(\tan J)/2, \tilde{J} = -\pi/4 - i \log(\tan b)/2 \in \mathbb{C}$$

空間方向へ伝搬する非ユニタリーな \$T\$ スピンの演算子

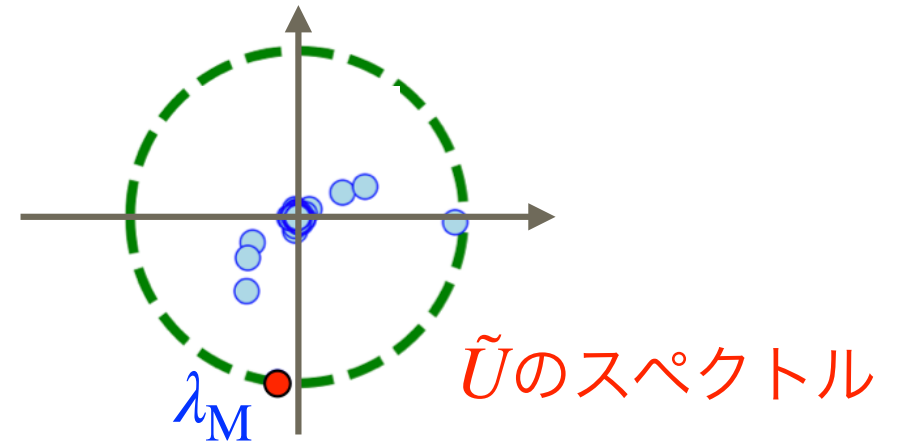
双対演算子と動的自由エネルギー

$$F_{L,T}^s = -\frac{1}{L} \log \left| \frac{\text{Tr}[U^T]}{2^L} \right| = -\frac{1}{L} \log |\text{Tr}[\tilde{U}^L]|$$

熱力学極限

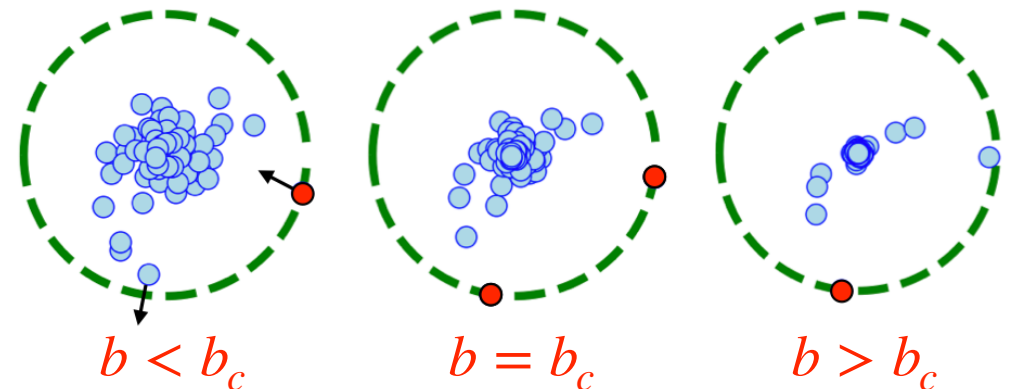
$$F_{\infty,T}^s = -\log |\lambda_M|$$

λ_M : $\tilde{U}$ の固有値のうち
絶対値が最大のもの



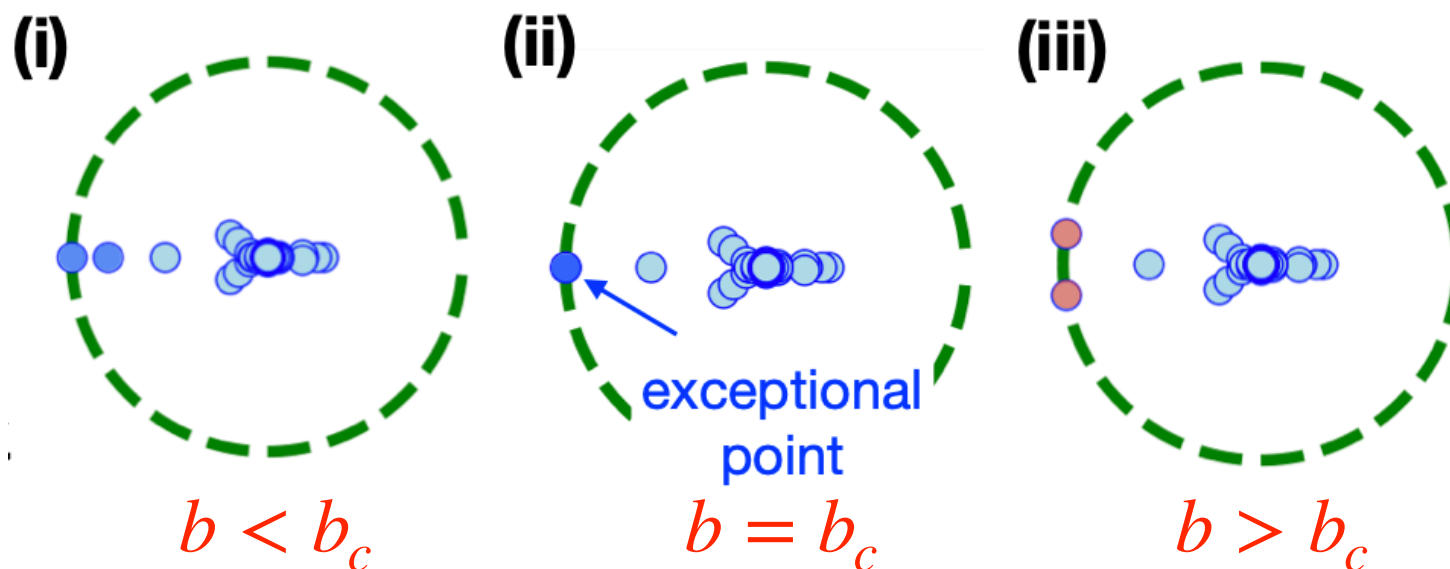
通常のDQPT:

絶対値最大の固有値が
入れ替わる



例外点的なDQPTのメカニズム

例外点的なDQPT: 最大固有値がぶつかる



このような固有値の衝突（例外点）は、
反ユニタリー対称性を持つ非ユニタリー行列の数理に起因

非ユニタリ行列の数理：反ユニタリ対称性と例外点

非ユニタリ行列 $X(g)$

X が反ユニタリ対称性を持つ：

あるユニタリー V と $\phi \in \mathbb{R}$ に対し、 $VX^*V^\dagger = e^{i\phi}X$ が成立

→ X の複素平面上のスペクトルは傾き ϕ の直線に関し対称

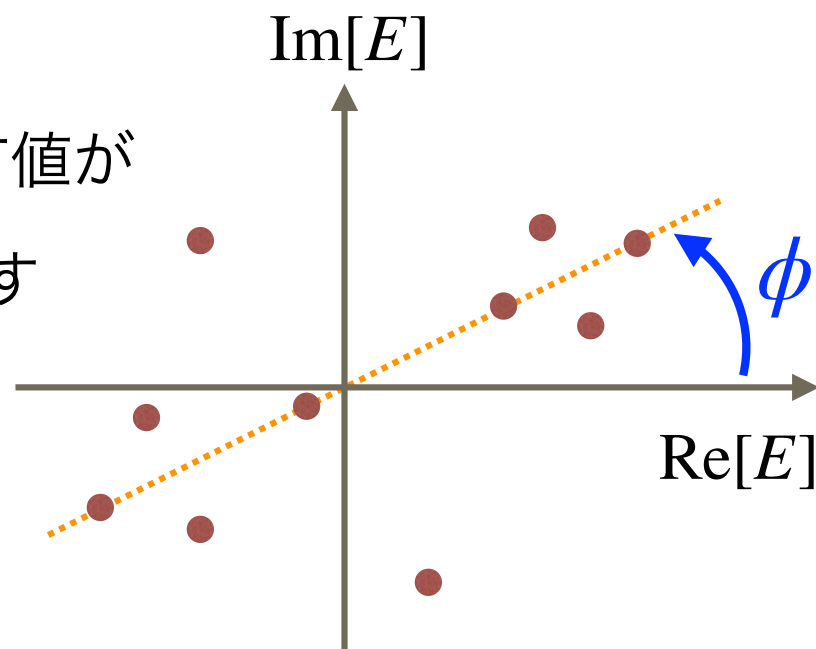
反ユニタリ対称性の自発的破れ

パラメータ g の変化で、直線上の二つの固有値が

$g = g_c$ でぶつかり（＝例外点）、ペアをなす

固有値間の差は典型的に

$\sim \sqrt{|g - g_c|}$ の特異性（普遍性）



例外点的なDQPTのメカニズム

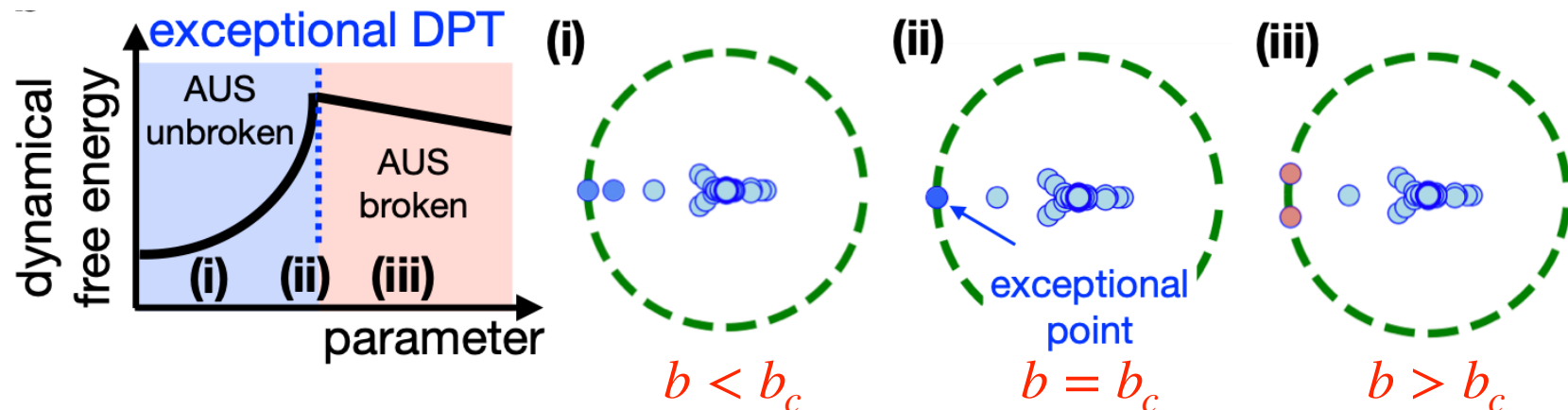
例外点的なDQPT: 最大固有値がぶつかり、例外点を通る

必要条件: $\tilde{U}$ に反ユニタリー対称性(class AI)が隠れていること

← $J = -\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$, $T = 2m$ ($n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$) が U について成立($F_{\infty,T}^s$ の場合)

$$\left(\prod_{\tau=1}^T e^{i\frac{\pi}{2}\sigma_{\tau}^y} \right) \tilde{U}^* \left(\prod_{\tau=1}^T e^{i\frac{\pi}{2}\sigma_{\tau}^y} \right)^{\dagger} = e^{i\phi} \tilde{U} \quad \left(\prod_{\tau=1}^T e^{i\frac{\pi}{2}\sigma_{\tau}^y} \right) \left(\prod_{\tau=1}^T e^{i\frac{\pi}{2}\sigma_{\tau}^y} \right)^* = \mathbb{I}$$

例外点的DQPTが $F_{\infty,T}^{\downarrow\uparrow}$ で起こる条件も示せる

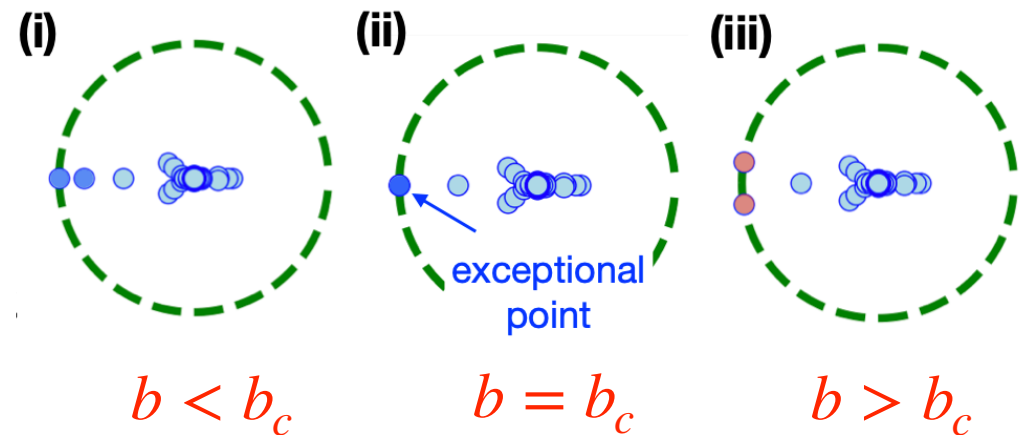


一般化期待値の発散

典型的には、二つの固有値の差は $|b - b_c|^{1/2}$

*一般化期待値

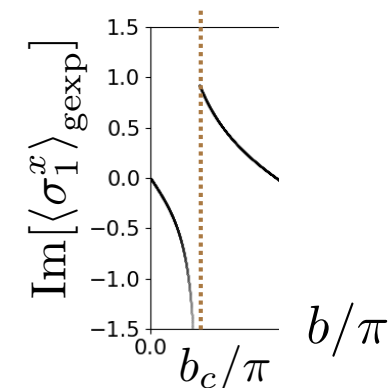
$$\begin{aligned} \text{Im}[\langle \sigma_1^x \rangle_{\text{gexp}}] &\propto \frac{dF_{\infty, T}^s}{db} \\ &= - \frac{d \log |\lambda_M|}{db} \end{aligned}$$



動径方向の変化：対称性が破れていない場合 ($b < b_c$) のみ急激に変化

$$\text{Im}[\langle \sigma_1^x \rangle_{\text{gexp}}] \sim \begin{cases} (b_c - b)^{-1/2} & (b < b_c) \\ \text{finite} & (b > b_c) \end{cases}$$

反ユニタリー対称性の破れていない相でのみ発散



Part IIIのまとめ

ユニタリーな周期駆動量子Ising模型において、
新しいタイプの普遍的な動的量子相転移を発見した

この動的量子相転移の特異性は、
元のダイナミクスの時空間双対の演算子に潜む
反ユニタリー対称性の自発的破れ（例外点の普遍性）に起因

まとめ

人工量子系の発展により、新しいタイプの
非平衡量子現象の存在が注目を集めている

最も基本的な多体模型の一つである量子Ising模型における
二つの非平衡量子現象の結果を議論した

- ・ 弱磁場下の高次元量子Ising模型について、ヒルベルト空間分割による
非熱的なダイナミクスが現れることを示した
[A. Yoshinaga, H. Hakoshima, I. Imoto, Y. Matsuzaki, and R. Hamazaki \[arXiv:2111.05586\]](#)
- ・ ユニタリーな周期駆動量子Ising模型において、
隠れた反ユニタリー対称性の破れに起因する普遍的な動的相転移を発見
[R. Hamazaki, Nature Communications 12, 5108 \(2021\).](#)