

量子系の情報伝搬：

自由伝搬の一般的性質と測定によるその抑制

-長距離相互作用の効果を中心に-

齊藤圭司

(慶應大学物理学科)

共同研究者

湊崇晃（慶應大学（現日立））

桑原知剛（理研）、杉本高大（慶應大学）

Tan Van Vu (慶應大学)

1. 情報伝搬に関するレビュー

- Lieb-Robinson の物理と長距離相互作用系、ボソン系

2. 測定誘起相転移

- 測定誘起相転移の条件

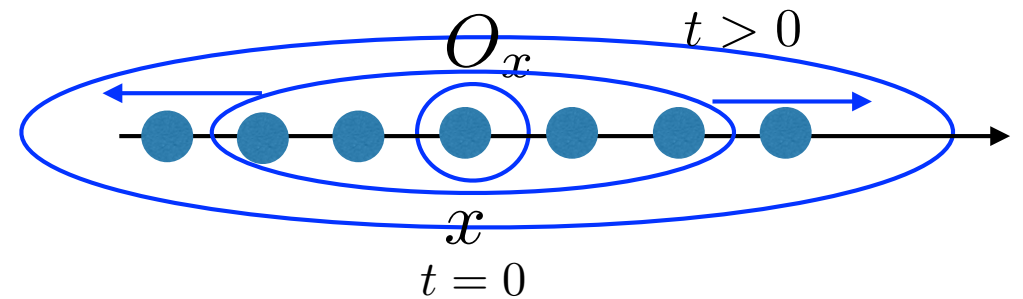
3. まとめと今後の展望

情報伝搬に関するレビューと現状

情報（エンタングルメントを意識）の伝搬

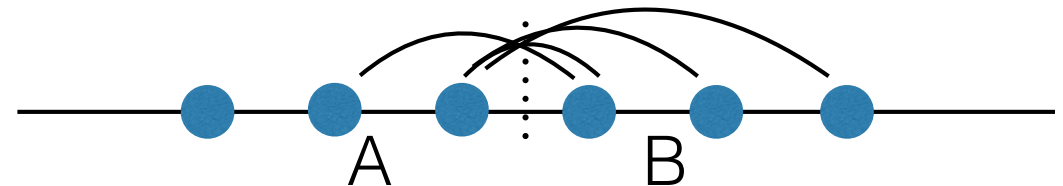
(1) 広義：Operator spreading.

$$e^{iHt} O_x e^{-iHt} = O_x + it [H, O_x] + \dots$$



(2) 狭義：エンタングルメントのダイナミクス

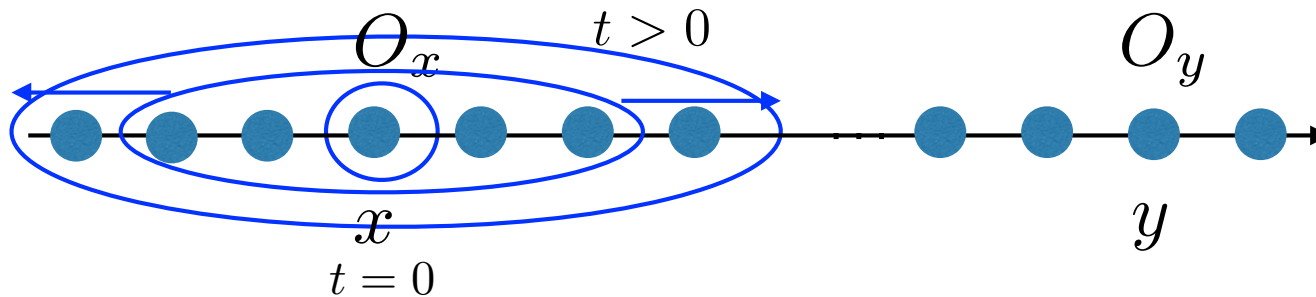
$$S(t) = -\text{Tr}_A \rho_A(t) \ln \rho_A(t)$$



(1) Operator Spreading の定義

- オペレーター交換関係

$$\| [O_x(t), O_y] \|_p \quad \|O\|_p := \left[\text{Tr}(O^\dagger O)^{\frac{p}{2}} \right]^{\frac{1}{p}}$$



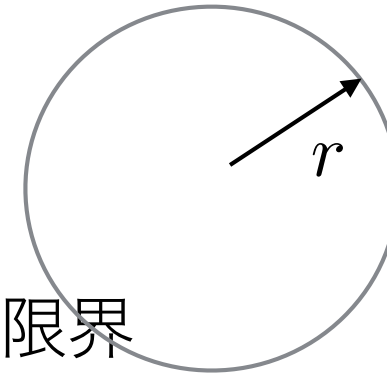
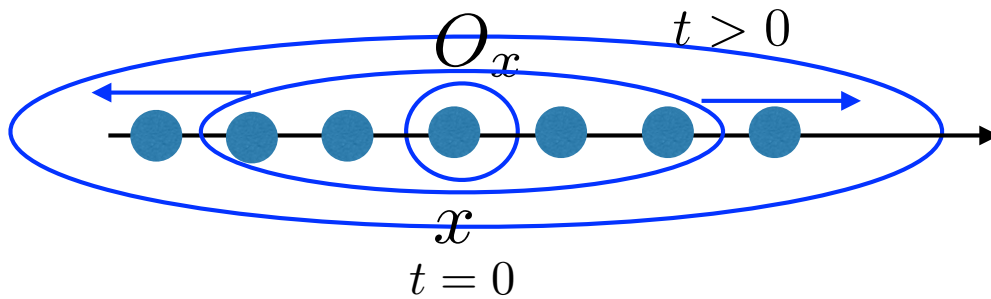
$p = \infty$: (オペレーターノルム) 最も速い伝搬を記述

$p = 2$: (フロベニウスノルム) 典型的な状態での伝搬 $\beta = 0$

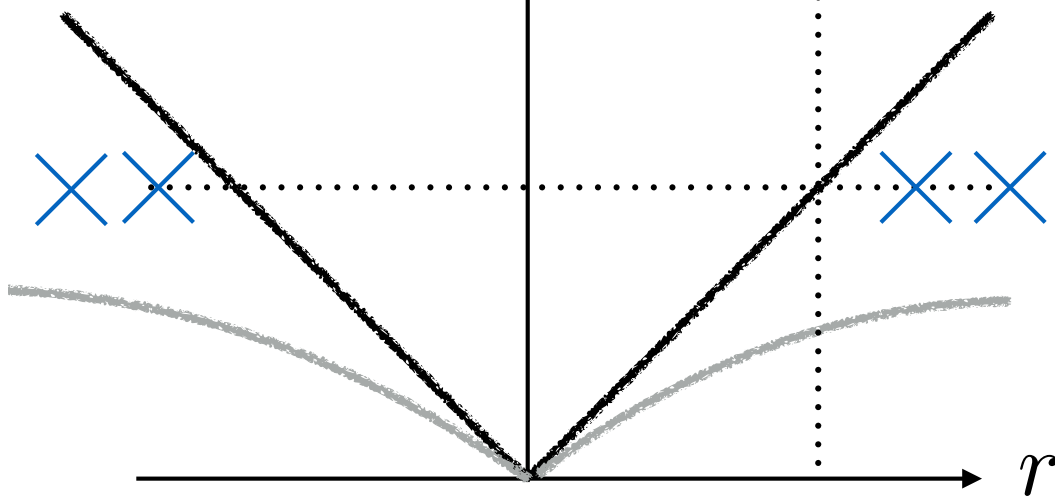
Out-of-time order correlator (OTOC)

情報が伝搬できる限界

- 自然界における、「できないこと」の1つを表現



- 情報（エンタングルメントを含む）伝搬の限界
「スピードリミット」



「Lieb-Robinson物理」

$r \sim t$: linear light cone

$r \sim t^z$: polynomial light cone

$r \sim e^{ct}$ or faster

: fast scrambling

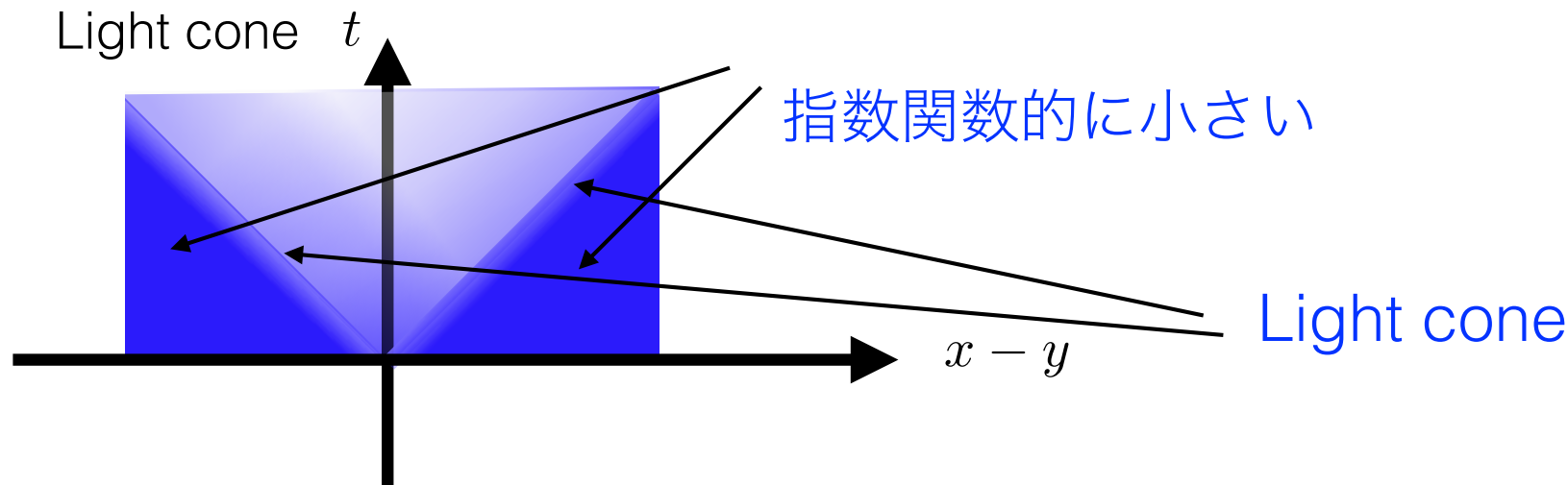
- 短距相互作用系

$$H = \sum_i h_{i,i+1} + h_i$$

$$\text{e.g., } H = \sum_{i=1}^n [J \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{i+1} + B S_i^z]$$

- $\| [O_x(t), O_y] \|_\infty$ に対する厳密な評価: Lieb-Robinson bound

$$\| [O_x(t), O_y] \|_\infty < \text{const.} \|O_x\| \|O_y\| e^{vt - |x-y|} \quad v \propto \sum_j \|h_{i,j}\|$$



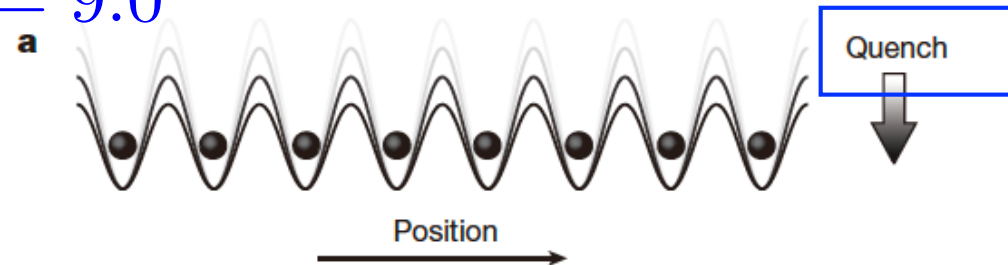
- LR 速度 v は1サイトあたりのエネルギーの最大値 $v \propto \sum_j \|h_{i,j}\|$

- ボーズ・ハバードモデル
モット相内でのクエンチ
(モット点移転 $U_c/J \sim 3.4$)

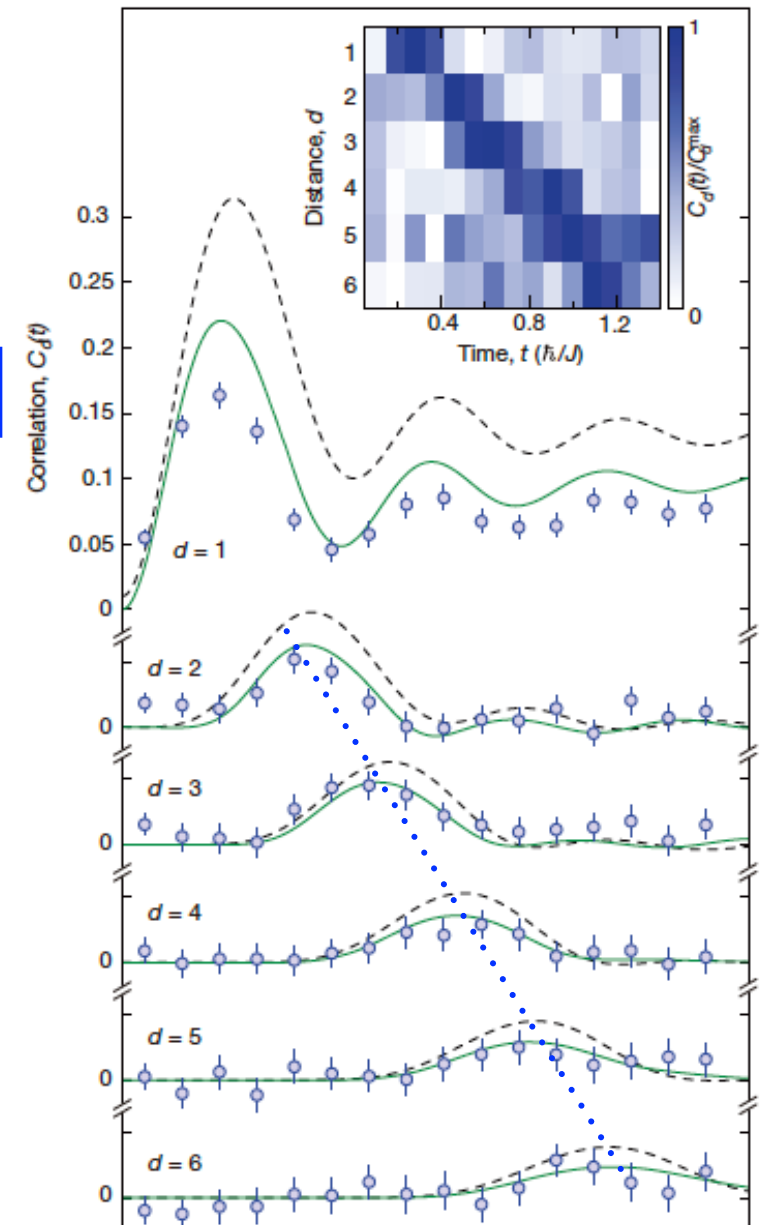
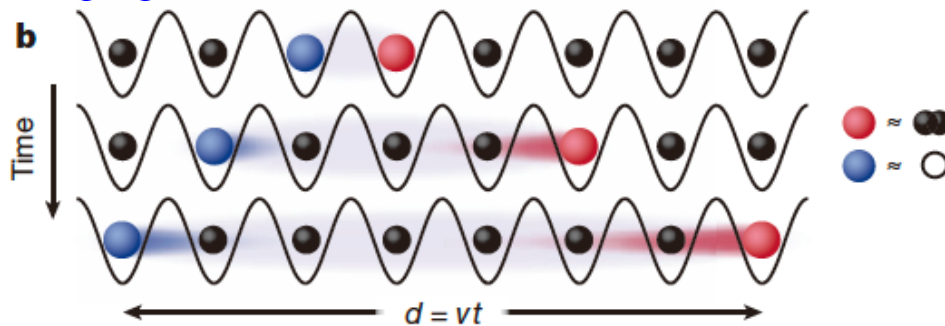
$$C_d(t) = \langle \hat{s}_i(t) \hat{s}_{i+d}(t) \rangle - \langle \hat{s}_j(t) \rangle \langle \hat{s}_{j+d}(t) \rangle$$

$$\hat{s}_j(t) = e^{i\pi[\hat{n}_j(t) - \bar{n}]}$$

$$U/J = 9.0$$



$$U/J = 5.0$$



非自明な系での情報伝播

- 情報がどう伝搬するかが非自明な系（現状）

(1) 長距離相互作用系

T. Kuwahara, KS, PRX (2020)

T. Kuwahara, KS, PRL (2021)

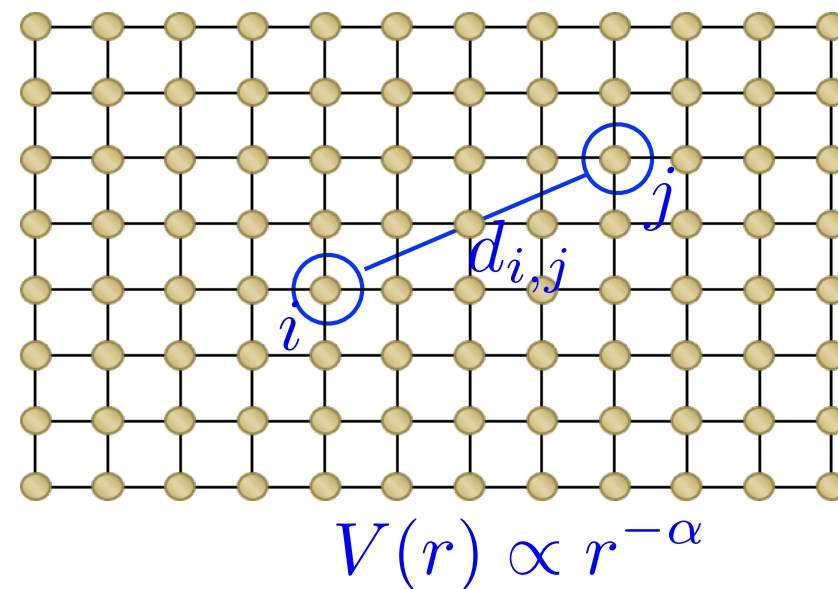
(2) ボソンの系

T. Kuwahara, T. VanVu, and KS, arXiv:2206.14736

- 長距離相互作用系

$$H = \sum_{i,j \in \Lambda} h_{i,j} \quad \|h_{i,j}\| \leq \frac{g_0}{d_{i,j}^\alpha}$$

e.g.,
$$H = \sum_{i,j} \frac{J}{d_{i,j}^\alpha} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j$$



- 長距離相互作用は長距離どうしを結びつける。

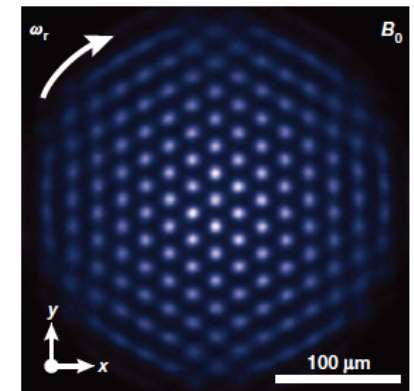
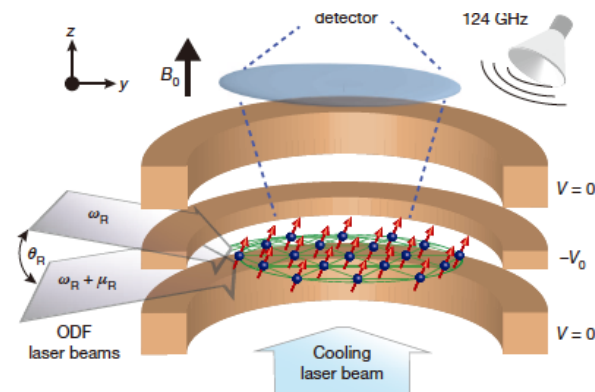
しかし、長距離では相互作用の強さは弱い。

linear light cone が得られるかどうかは非自明

長距離距離相互作用は自然界に至る所に存在

- 長距離相互作用 $V(r) \propto r^{-\alpha}$
 - $\alpha = 1$ Gravitational field
 - $\alpha = 3$ Magnetic dipole interaction
 - $\alpha = 6$ Lenard-Jones potential
- 近年では人工的につくることさえできる。全結合も可能
Rydberg atoms, Ion trapped systems

$$H = \sum_{\mathbf{r}} \sum_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^\alpha} \sigma_{\mathbf{r}}^z \sigma_{\mathbf{r}'}^z$$



J. W. Britton, et al., Nature (2012)

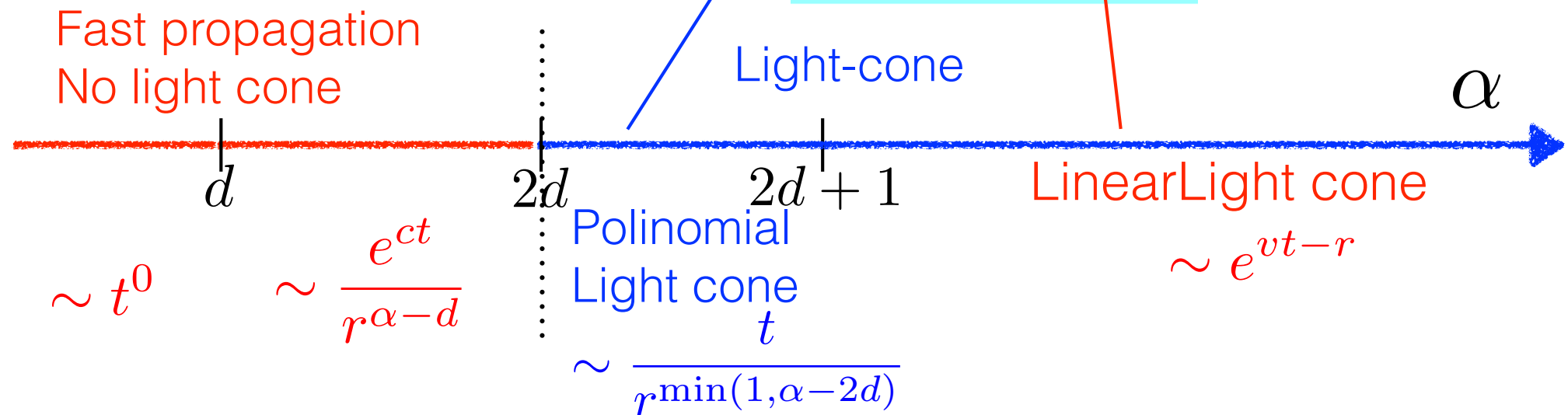
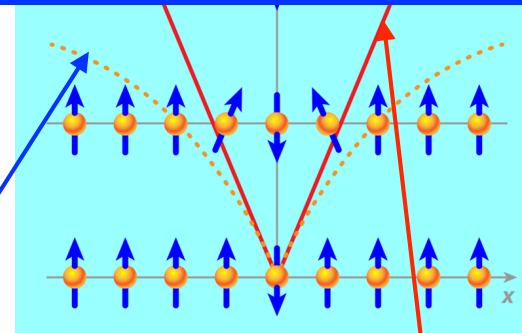
Black-Holeを真似たダイナミクス？

State-of-the-art diagram

$$V(r) \propto r^{-\alpha}$$

- State-of-the-art classification

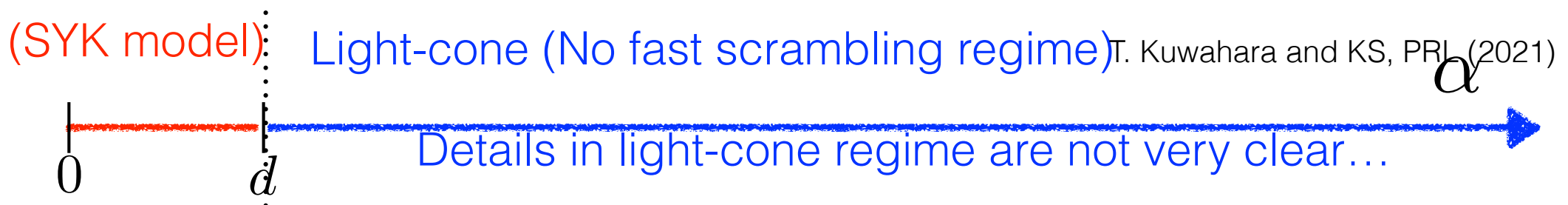
1. Operator norm $\| [O_X(t), O_Y] \|_\infty$



M. Turan et al., PRL (2021)

T. Kuwahara and KS, PRX (2020)

2. OTOC $\| [O_X(t), O_Y] \|_2$



T. Kuwahara and KS, PRL (2021)

情報伝播に関する重要な点

- 短距離相互作用では、エンタングルメントの伝搬も含め、情報伝搬の限界はLight Cone を持つ。
- 長距離相互作用系であっても、非自明にLight Coneを持つ場合がある。 $\alpha > 2d + 1$

1. 情報伝搬に関するレビュー

- Lieb-Robinson の物理と長距離相互作用系、ボソン系

2. 測定誘起相転移

- 測定誘起相転移の条件

3. まとめと今後の展望

エンタングルメントに特化したダイナミクス

- 純粋状態：Von-Neumann エントロピー



$$S = -\text{Tr}_A \{ \rho_A \ln \rho_A \} \quad \rho_A = \text{Tr}_B (|\varphi\rangle\langle\varphi|)$$

Product state: $S = 0$

Singlet state: $S = \log 2 > 0$ $|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$

典型的なエンタングルメントは時間に線形に広がっていく

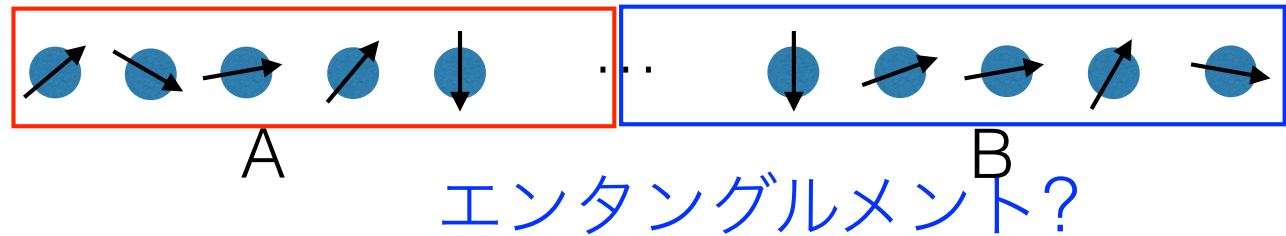
- 短距離相互作用系

$$H = \sum_{i=1}^L h_{i,i+1} \quad \text{e.g., } h_{i,i+1} = -\sigma_i^z \sigma_{i+1}^z + h \sigma_i^z + g \sigma_i^x$$

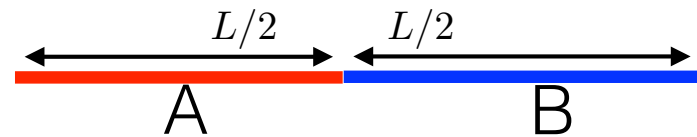
$|\varphi(0)\rangle = |\uparrow\uparrow \cdots \uparrow\uparrow\rangle$ 

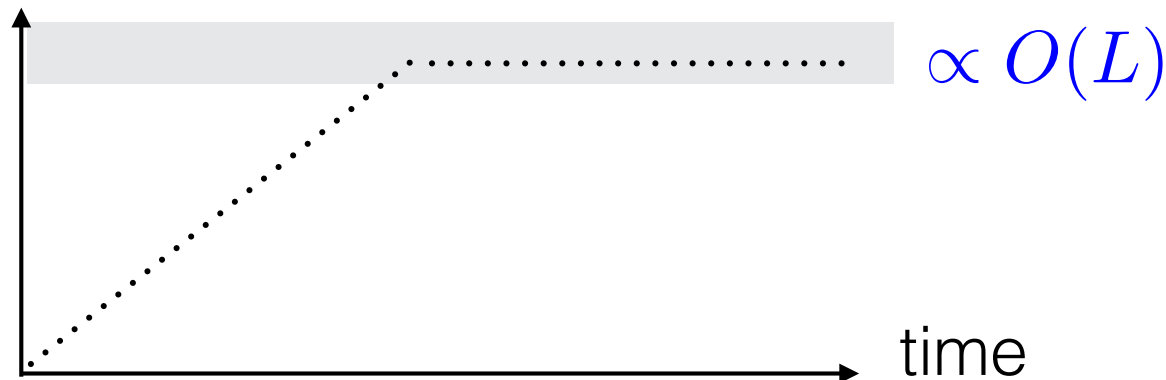
初期状態：積状態（ゼロエンタングルメント）

$$|\varphi(t)\rangle = e^{-itH} |\varphi(0)\rangle$$



- エンタングルメントは系のサイズまで成長する

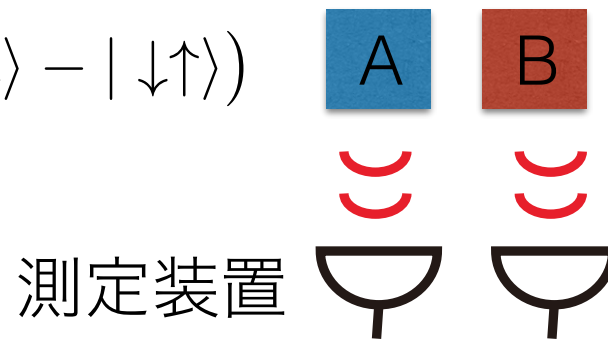
$$S = -\text{Tr}_A \{ \rho_A \ln \rho_A \}$$




量子測定によるエンタングルメントの抑制

- 一般に量子射影測定は、エンタングルメントを切る

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$$



局所的スピン測定

測定後状態

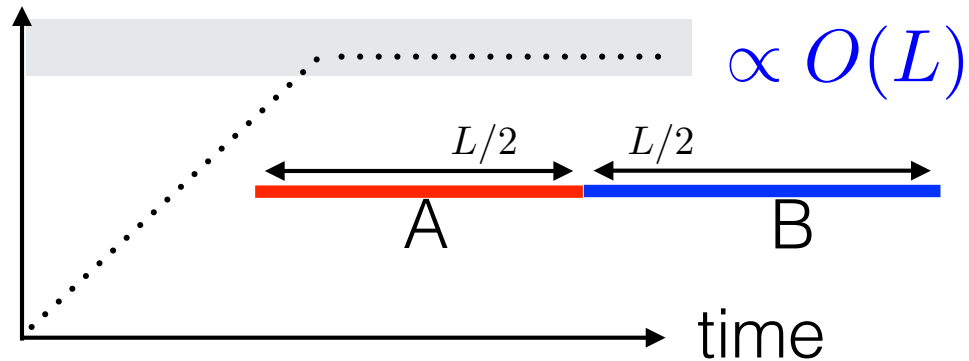
$|\uparrow\downarrow\rangle$
or
 $|\downarrow\uparrow\rangle$

積状態 (not entangled)

量子測定による相転移

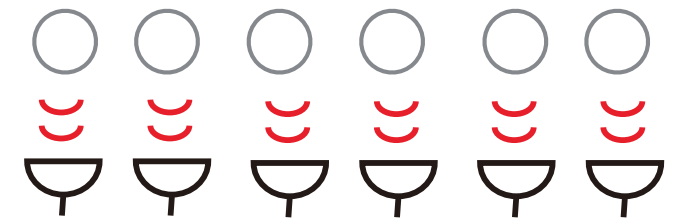
- 測定なしの時間発展

$$S = -\text{Tr}_A \{ \rho_A \ln \rho_A \}$$



エンタングルメント成長

- 測定



競合

エンタングルメント抑制

- これらの競合： 測定誘起相転移

(Measurement-induced phase transition (MIP))

$O(L)$: Volume Law

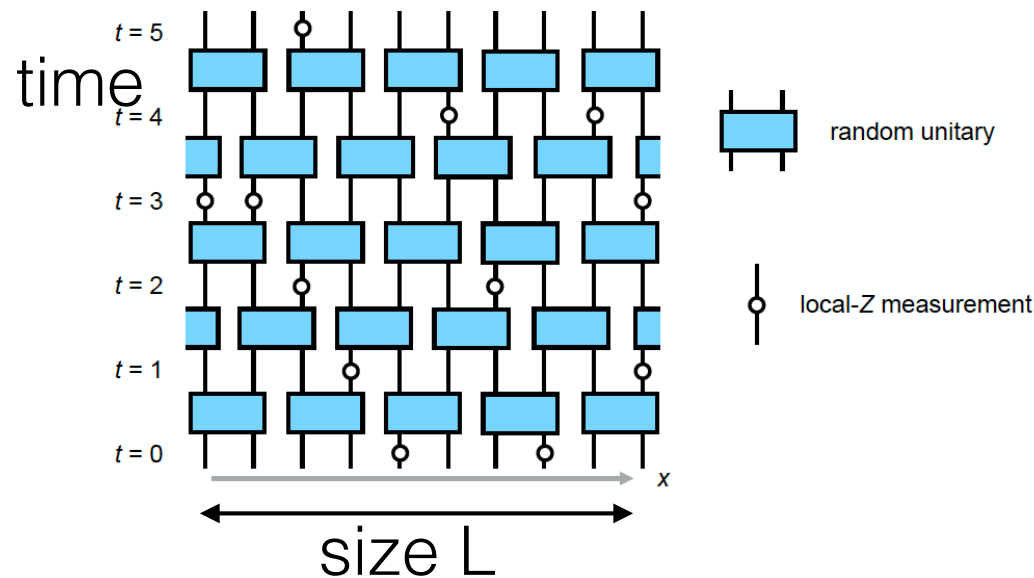
$O(1)$: Area Law

測定頻度 γC

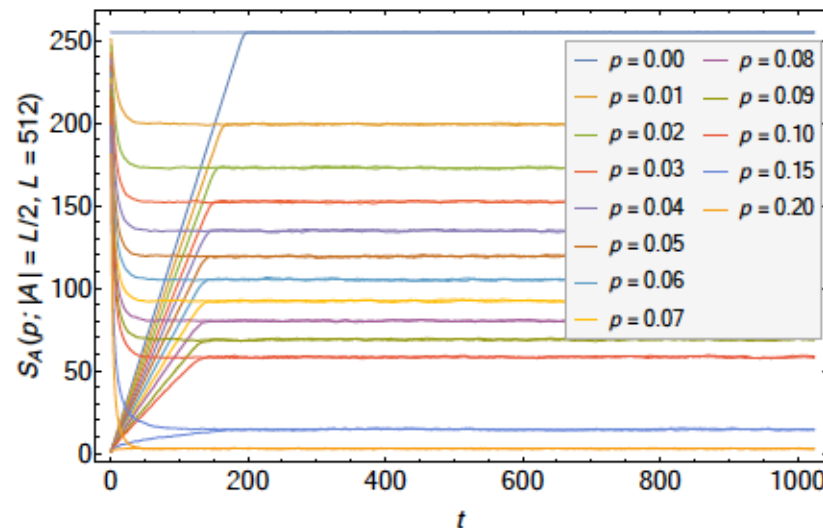
Measurement-induced Phase Transition (MIP) : 最初のモデル

Li, et al., PRB (2019) Skinner, PRX (2019)

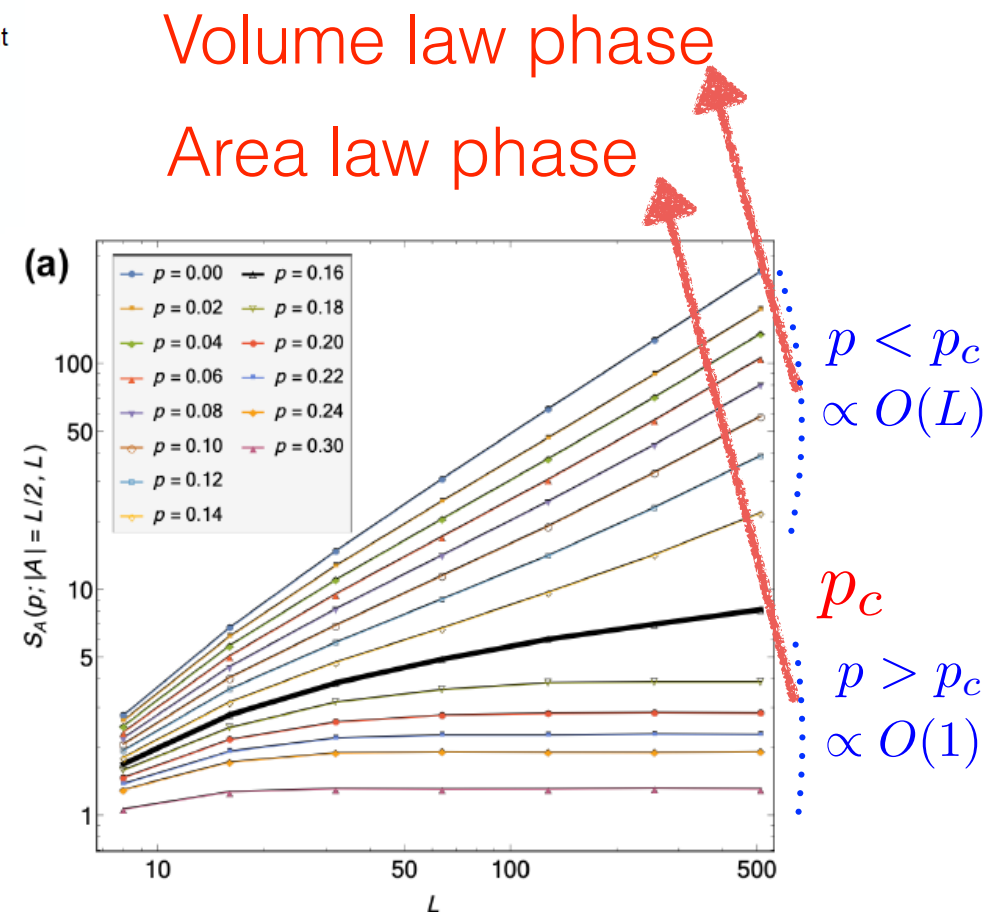
- 量子回路 + 射影測定 (頻度 p)



- MIP



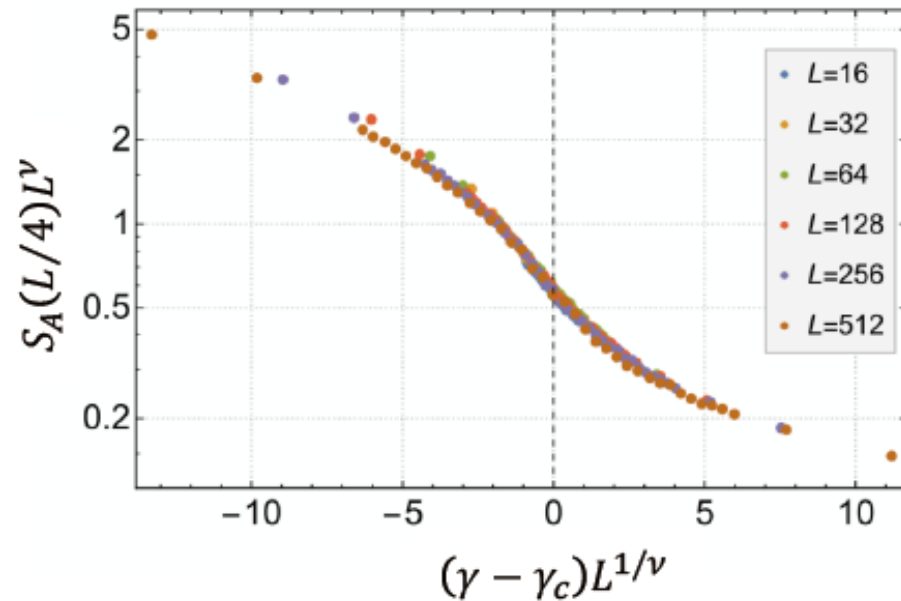
Sの時間発展 (定常状態の実現)



定常状態でのSのサイズ依存性

Measurement-induce phase transition (MIP)

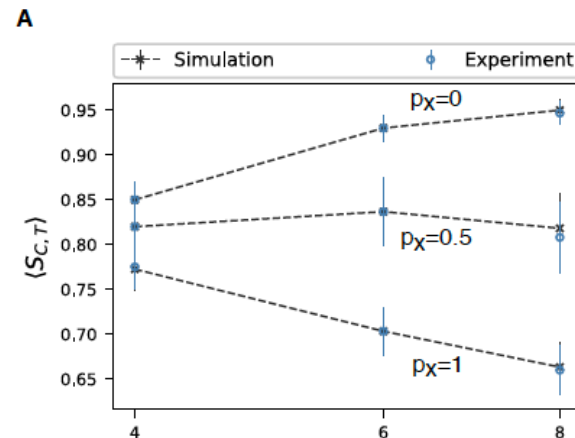
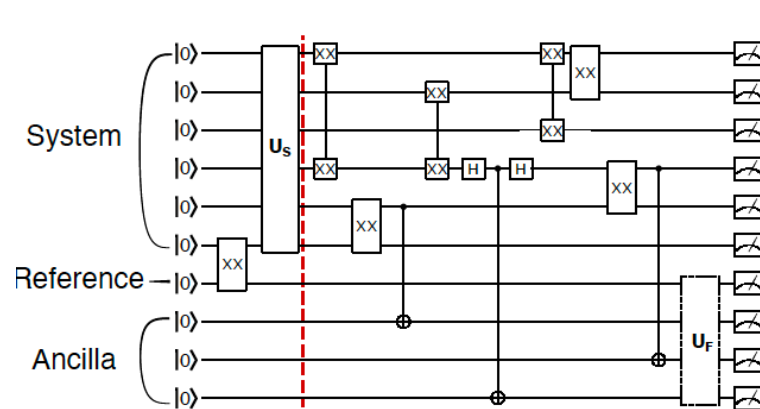
- 有限サイズスケーリング → 本当に相転移



Li, et al., PRB (2019) Skinner, PRX (2019)

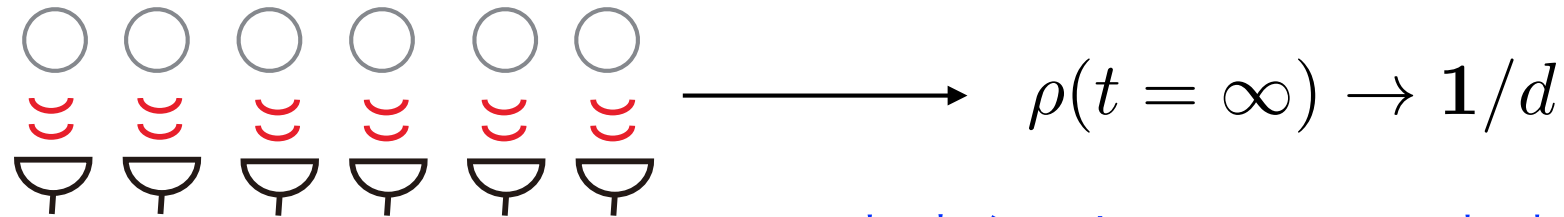
- 実験: Noel et al., Nature Physics (2022) arXiv:2106.05881

Ion-trapped system 4-8 qubits



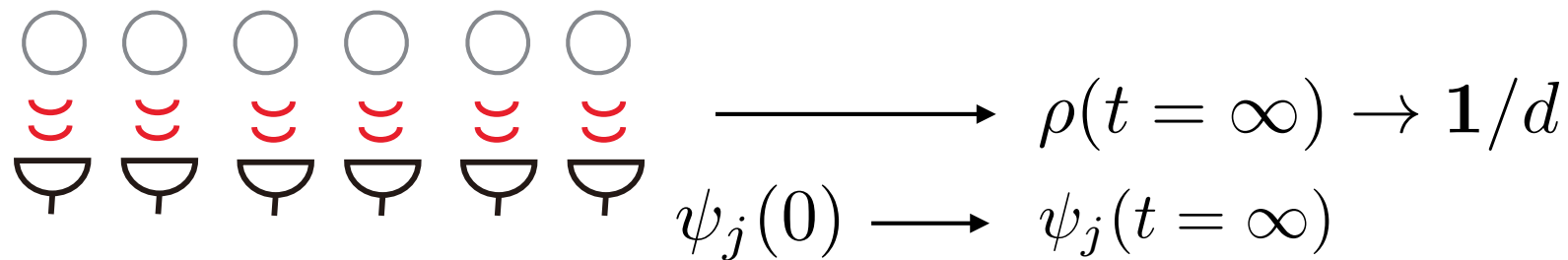
重要な点: MIPは波動関数レベルの相転移

- 量子測定下での時間発展の定常状態：密度行列は自明な状態



密度行列レベルでは相転移なし

- MIP は波動関数レベルでの相転移



$$\mathbf{1}/d = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M |\psi_j(t = \infty)\rangle \langle \psi_j(t = \infty)|$$

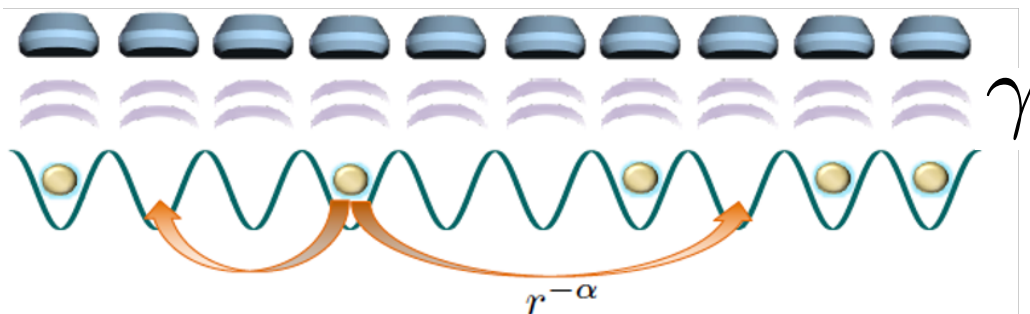
transition in $\psi_j(0) \longrightarrow \psi_j(t = \infty)$

- 背景

情報伝播では、長距離相互作用で伝搬の様子が変わった

→エンタングルメントおよびMIPも長距離相互作用によって影響されるべき。どのように？

- Effect of long-range interaction with $r^{-\alpha}$?

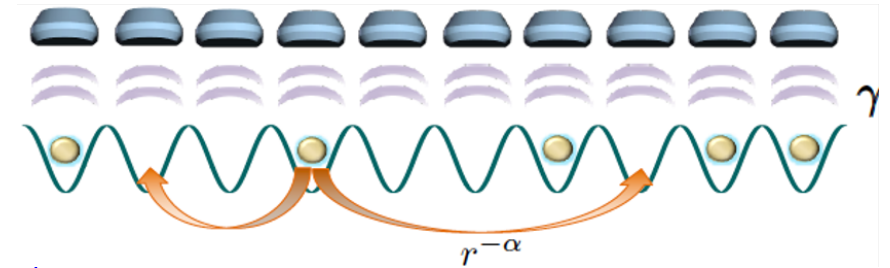


1d example

$$H = \sum_{j=1}^L \sum_{r=1}^{L/2} \frac{1}{r^{\alpha}} \left[-c_{j+r}^{\dagger} c_j - c_j^{\dagger} c_{j+r} + V n_{j+r} n_j \right]$$

- 1D Setup

$$H = \sum_{j=1}^L \sum_{r=1}^{L/2} \frac{1}{r^\alpha} \left[-c_{j+r}^\dagger c_j - c_j^\dagger c_{j+r} + V n_{j+r} n_j \right],$$



- 量子ジャンプ過程

量子測定：各サイトの粒子を測定

$$d|\psi(t)\rangle = -iH|\psi(t)\rangle + \sum_{j=1}^L \left[\frac{n_j |\psi(t)\rangle}{\sqrt{\langle \psi(t) | n_j | \psi(t) \rangle}} \right] dw_j(t)$$

$$dw_j(t) = 0 \text{ or } 1 \quad \overline{dw_j(t)} = \gamma \langle n_j \rangle dt$$

自由フェルミオン系 $V=0$

$$H = \sum_{j=1}^L \sum_{r=1}^{L/2} \frac{1}{r^\alpha} \left[-c_{j+r}^\dagger c_j - c_j^\dagger c_{j+r} + V n_{j+r} n_j \right],$$

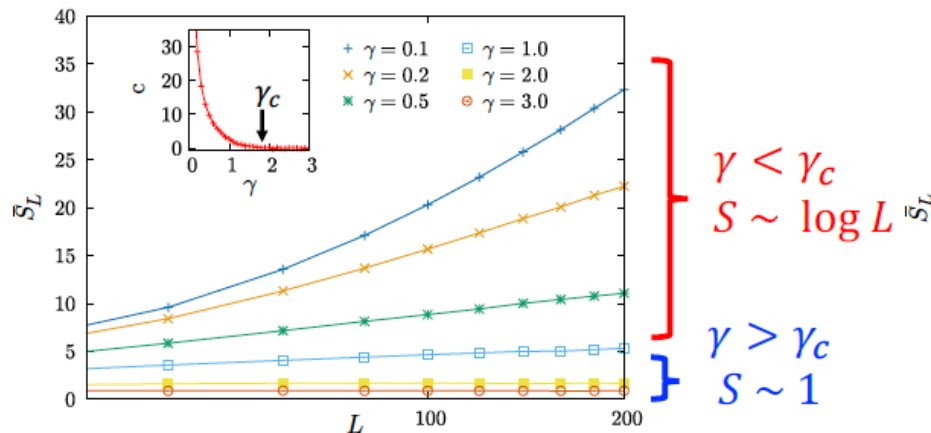
- 初期状態： Neel state (1サイトおきに粒子を置く)

$$S_A = -\text{Tr}_A \{ \rho_A \ln \rho_A \}$$

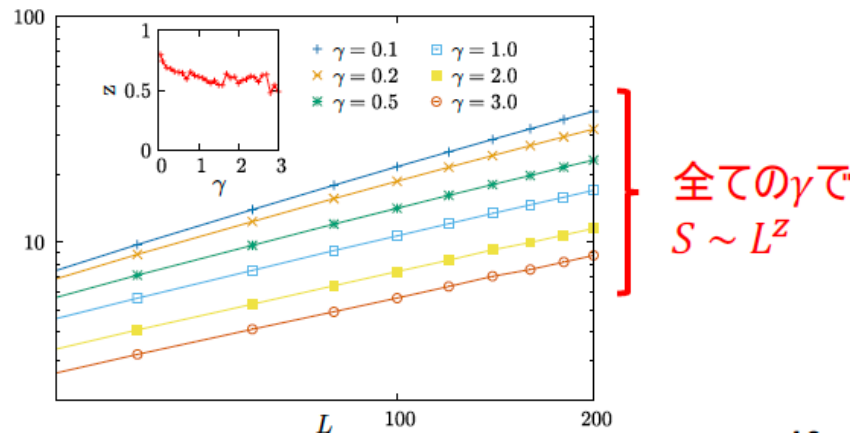
$\overbrace{\hspace{10em}}^A$
 $L/2$

$\overbrace{\hspace{10em}}^B$
 $L/2$

- $\alpha = 2.3$: the MIP exists



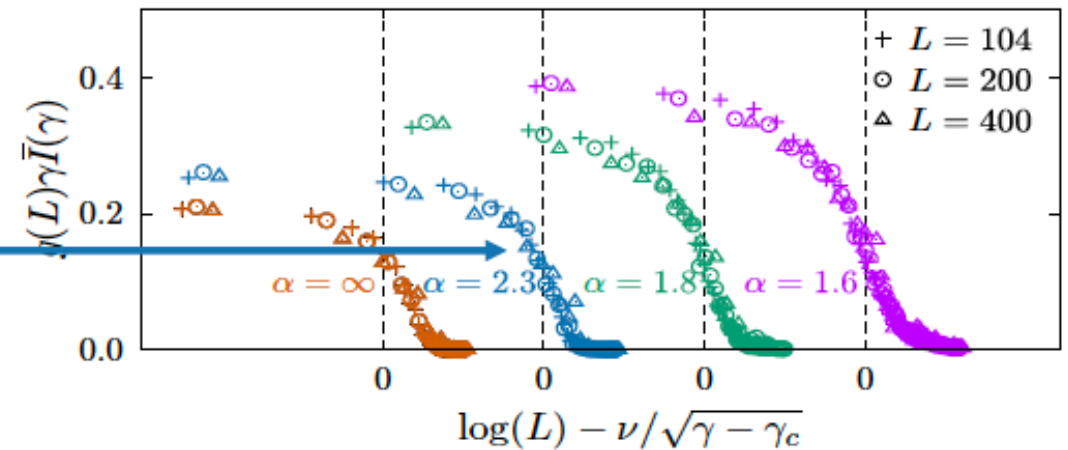
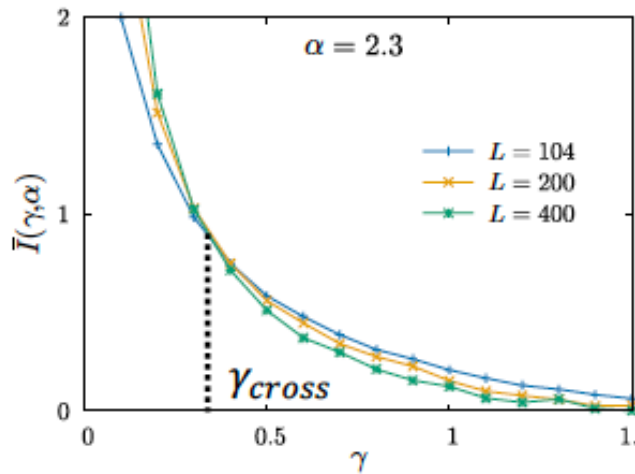
- $\alpha = 0.8$: No MIP exists



自由フェルミオン系：Berezinskii-Kosterlitz-Thouless (BKT) 転移

- 相互情報量

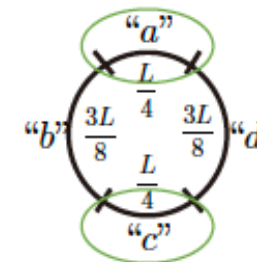
$$\bar{I} := \bar{S}_a + \bar{S}_c - \bar{S}_{ac}$$



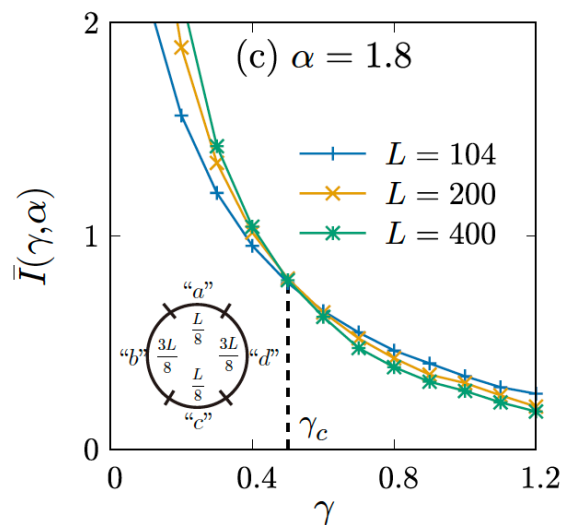
BKT転移の有限サイズスケーリング

- 自由フェルミオン系 ($V=0$) : BKT転移

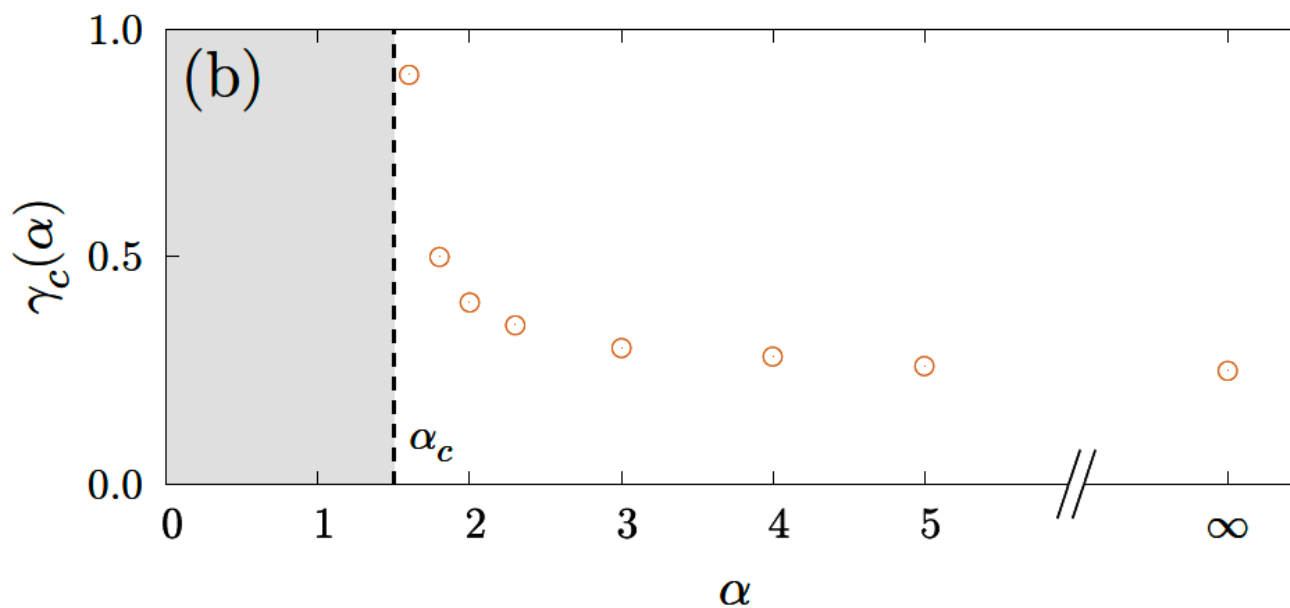
- 相転移点の決定：相互情報量 $\bar{I} := \bar{S}_a + \bar{S}_c - \bar{S}_{ac}$



- 交差点の存在による決定法



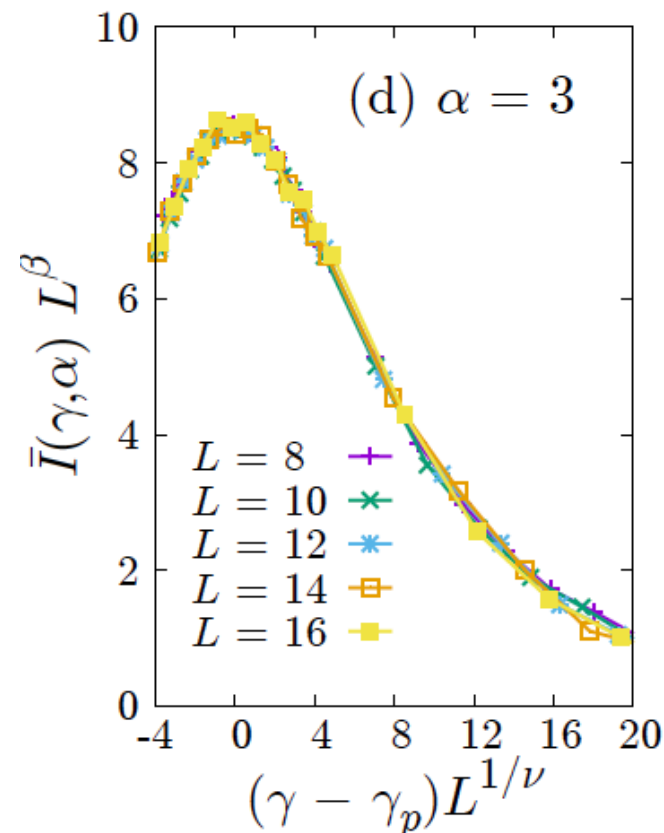
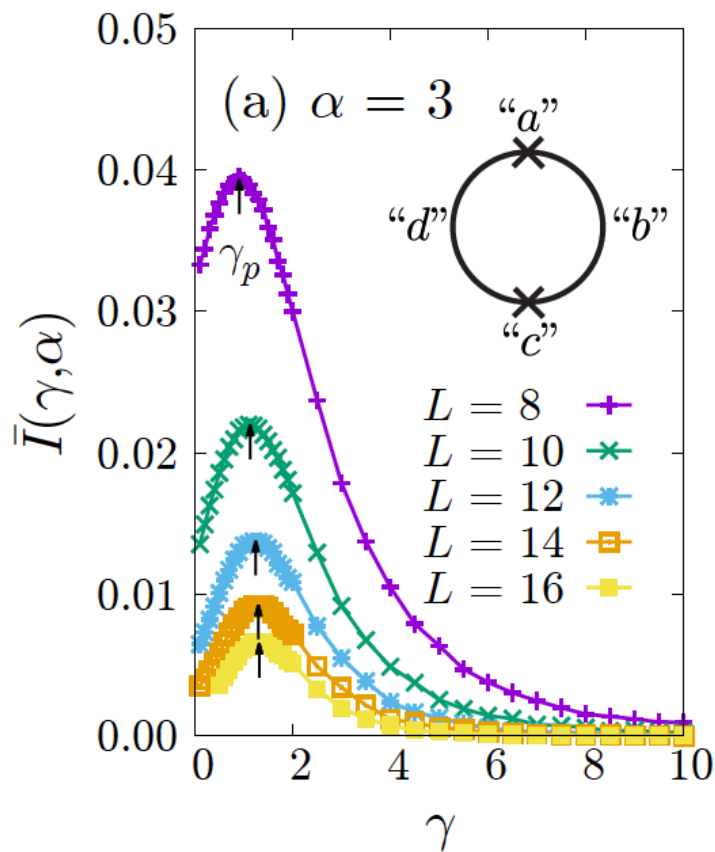
- $\alpha > 3/2$ でMIP存在



非可積分系 ($V \neq 0$)

$$H = \sum_{j=1}^L \sum_{r=1}^{L/2} \frac{1}{r^\alpha} \left[-c_{j+r}^\dagger c_j - c_j^\dagger c_{j+r} + V n_{j+r} n_j \right],$$

- 非可積分系では、 $\alpha < 2$ で相転移が観測されない。
- $\alpha > 2$ では、2次相転移の有限サイズスケーリングでフィット



- Main statement

Sufficient condition to observe the MIP

$$\alpha > \frac{d}{2} + 1 \quad \text{Bilinear Fermion systems}$$

$$\alpha > d + 1 \quad \text{General non-integrable systems}$$

- この主張の解析背景

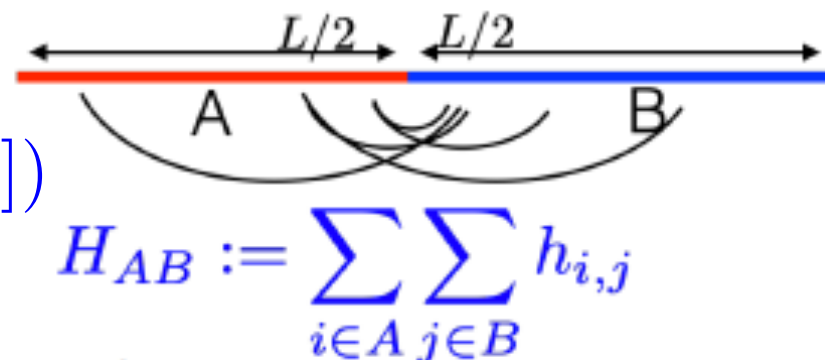
エンタングルメント成長の方程式

$$\dot{S}_A = i \|H_{AB}\| \lambda(\rho)$$

$$\lambda(\rho) := \text{Tr}_{AB}(h_{AB} [\rho_{AB}, \ln \rho_A \otimes \mathbf{1}_B])$$

$$h_{AB} = \frac{H_{AB}}{\|H_{AB}\|}$$

$$H = H_A + H_B + H_{AB}$$



$\|H_{AB}\| < \infty \rightarrow$ 強い量子測定でエンタングルメント成長が抑制可
 $\rightarrow$ MIP should exist

$\|H_{AB}\| \rightarrow \infty \rightarrow$ 量子測定でのエンタングルメント成長抑制不可
 $\rightarrow$ No MIP

- 長距離相互作用に焦点をあてて、情報伝搬と測定誘起相転移を議論した。
- 測定誘起相転移が起こる十分条件を導出。

今後の開かれた課題

- 測定誘起相転移のバリエーションの追求
- 測定誘起相転移存在の厳密証明

Lieb-Robinson bound for short-range interaction

- LR bound is important !

1. Causality: fundamental

2. Many Applications: leading to crucial physics

(2-1) Exponential decay in ground state in gapped system

Hasting, Koma, J.Stat.Phys.

(2-2) No-go theorem of long-range entanglement at finite temperatures

T. Kuwahara and KS, PRX (2022)

(2-3) Estimation of computation time

...

Short-range versus Long-range interactions in many-body systems

- Short-range interacting many-body systems

e.g., Heisenberg model

$$H = \sum_{i=1}^n [J \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{i+1} + B S_i^z]$$

- Long-range interacting many-body systems

Power-law interaction $V(r) \propto r^{-\alpha}$ in our context

e.g., Heisenberg model with the power-law interaction

$$H = \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \frac{J}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^\alpha} \mathbf{S}_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{S}_{\mathbf{r}'} + \sum_{\mathbf{r}} B S_{\mathbf{r}}^z$$

- Change of thermodynamics due to long-range interaction

Nonadditivity : Entropy can be nonconcave

A. Campa, T. Dauxois, and S. Ruffo, Phys. Rep. (2009)

Phase transition :

A. Campa, A. Giansanti, and D. Moroni, Phys. Rev. E. (2000)

Quasi-stationary state:

V. Latora, Rapisarda, C. Tsallis, Phys. Rev. E. (2001)

Suppression of chaos:

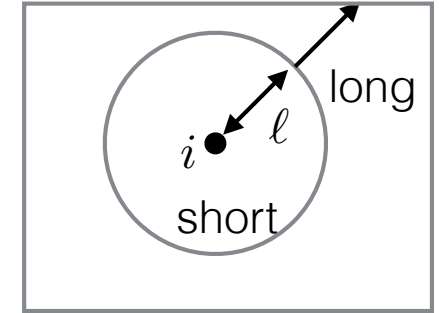
D. Baguchi and C. Tsallis, Phys. Rev. E. (2016)

Hand-waving argument

$$H = \sum_{i,j \in \Lambda} h_{i,j} \quad \|h_{i,j}\| \leq \frac{g_0}{d_{i,j}^\alpha}$$

- To get the feeling, divide H into H_{short} and H_{long}

$$H_{\text{short}} = \sum_{i,j: d_{i,j} \leq \ell} h_{i,j} \quad H_{\text{long}} = \sum_{i,j: \ell < d_{i,j}} h_{i,j}$$



- We want to know the operator spreading of $e^{-i(H_{\text{short}} + H_{\text{long}})t}$

(1) Easier problem to get the feeling: $e^{-iH_{\text{short}}t} e^{-iH_{\text{long}}t}$

$e^{-iH_{\text{short}}t}$: gives the LR linear light cone e^{vt-r}

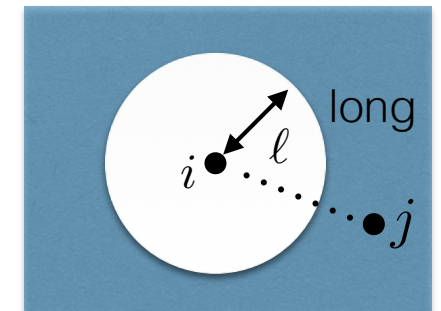
$e^{-iH_{\text{long}}t}$: $e^{v'\ell t - r}$ $v'\ell \sim \ell^{d-\alpha+1}$

Amplitude of one-site interacting operators

$$v' \sim \sum_{j: \ell < d_{i,j}} \|h_{i,j}\| \sim g_0 \int_{\ell}^{\infty} dr r^{d-1} r^{-\alpha} \sim g_0 \ell^{d-\alpha}$$

If $\alpha > d + 1$, $v'\ell \sim \ell^{d-\alpha+1} \rightarrow 0$ ($\ell \rightarrow \infty$)

linear light cone is expected

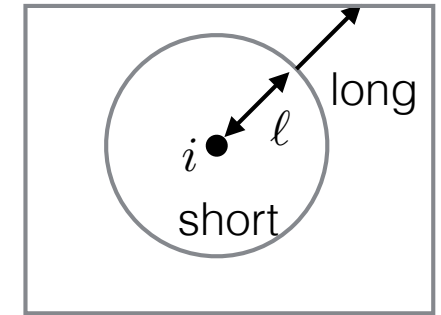


Hand-waving argument

$$H = \sum_{i,j \in \Lambda} h_{i,j} \quad \|h_{i,j}\| \leq \frac{g_0}{d_{i,j}^\alpha}$$

- To get the feeling, divide H into H_{short} and H_{long}

$$H_{\text{short}} = \sum_{i,j: d_{i,j} \leq \ell} h_{i,j} \quad H_{\text{long}} = \sum_{i,j: \ell < d_{i,j} < 2\ell} h_{i,j}$$



- We want to know the operator spreading of $e^{-i(H_{\text{short}} + H_{\text{long}})t}$

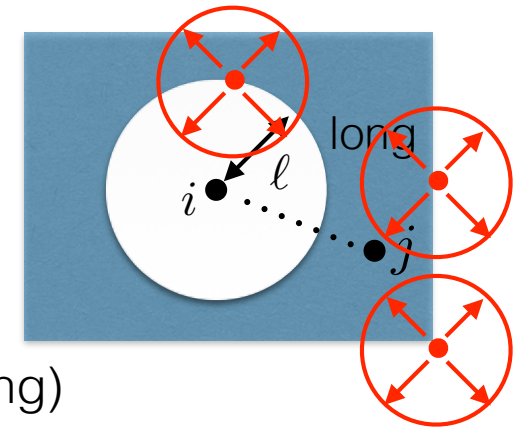
$$(2) \text{ How is } e^{-i(H_{\text{short}} + H_{\text{long}})t} ? = e^{-iH_{\text{short}}t} e_{\leftarrow}^{-i \int_0^t ds H_{\text{long}}(s)}$$

$$H_{\text{long}}(t) = e^{iH_{\text{short}}t} H_{\text{long}} e^{-iH_{\text{short}}t}$$

Amplitude of one-site interacting operators

$$t = 0 \quad \rightarrow \quad \sum_{j: \ell < d_{i,j}} \|h_{i,j}\| \sim g_0 \ell^{d-\alpha}$$

$$t > 0 \quad \rightarrow \quad g_0 \ell^{d-\alpha} \times t^d \quad (\text{Ballistic operator spreading})$$



$$e_{\leftarrow}^{-i \int_0^t ds H_{\text{long}}(s)} : e^{v' \ell t - r} \quad v' \ell \sim \ell^{d-\alpha+1} t^d \sim \ell^{d-\alpha+1} \ell^d = \ell^{2d-\alpha+1}$$

If $\alpha > 2d + 1$, light cone is expected