

# トポロジカル相と部分転置

笠 真生  
プリンストン大学

KEK連携コロキウム 2021/02/11-12

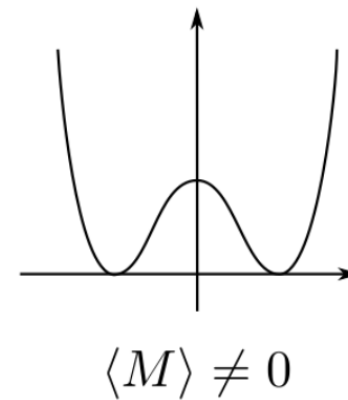
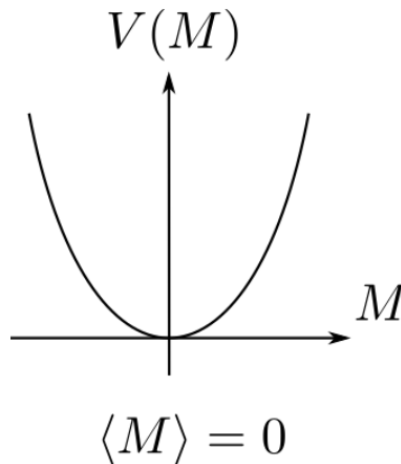
# アウトライン

- トポロジカル相、時間反転対称性で保護されたトポロジカル相
- 部分転置によるトポロジカル不変量
- 量子エンタングルメントと部分転置
- まとめ

# 凝縮系物理における量子相

$$H = \sum_{i=1}^{N>10^{23}} \left[ \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + v(\mathbf{r}_i) \right] + \sum_{i,j} V(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$$

- 凝縮系物理で実現される量子相の多くは、局所的な秩序変数によって特徴づけられる。
- 例：磁性体

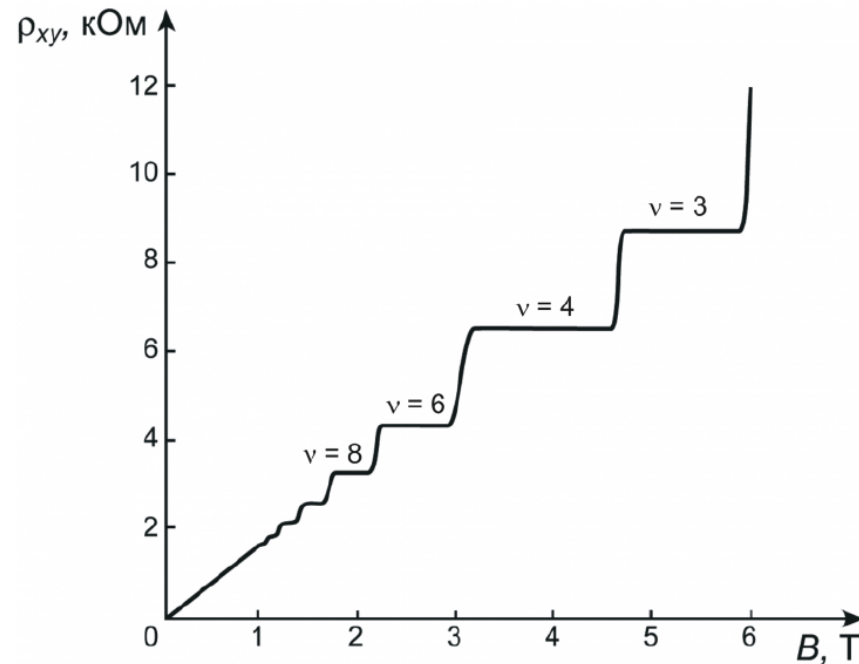


# トポロジカル相とは

- トポロジカル相は局所的な秩序変数で特徴付けられない量子無秩序相である。
- 量子化されたトポロジカル不変量で特徴付けられる。
- 例：量子ホール効果

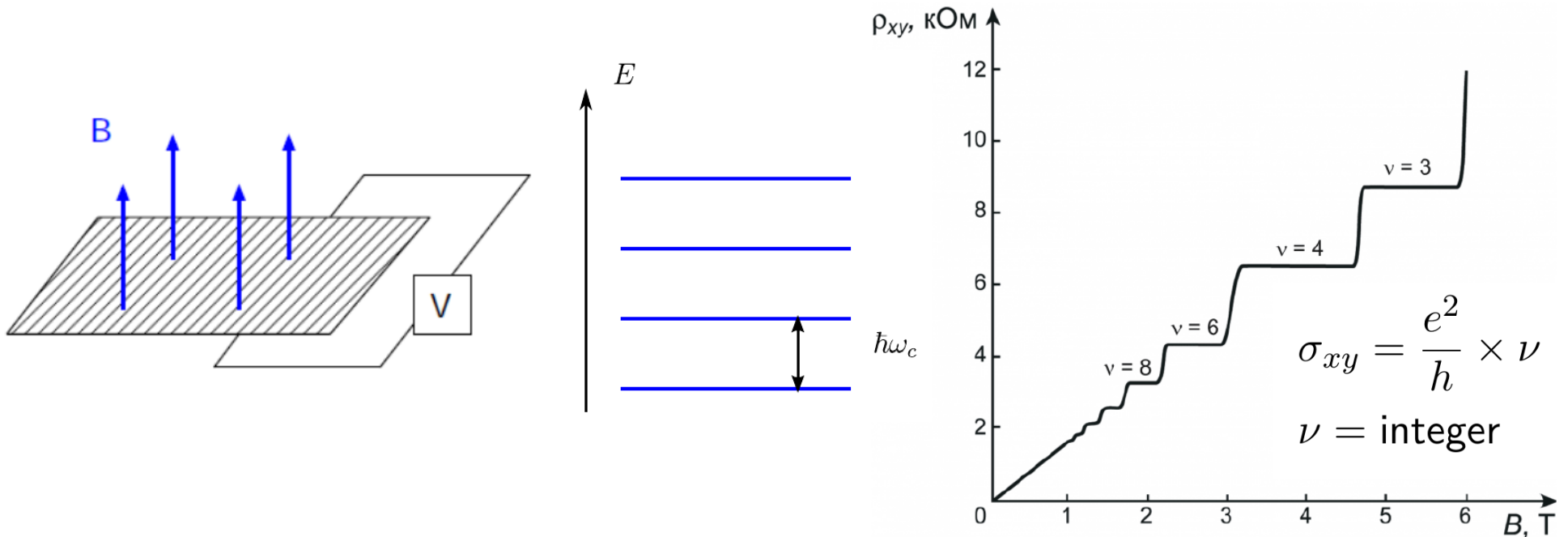
$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{h} \times \nu$$

$\nu = \text{integer}$



# (整数)量子ホール効果

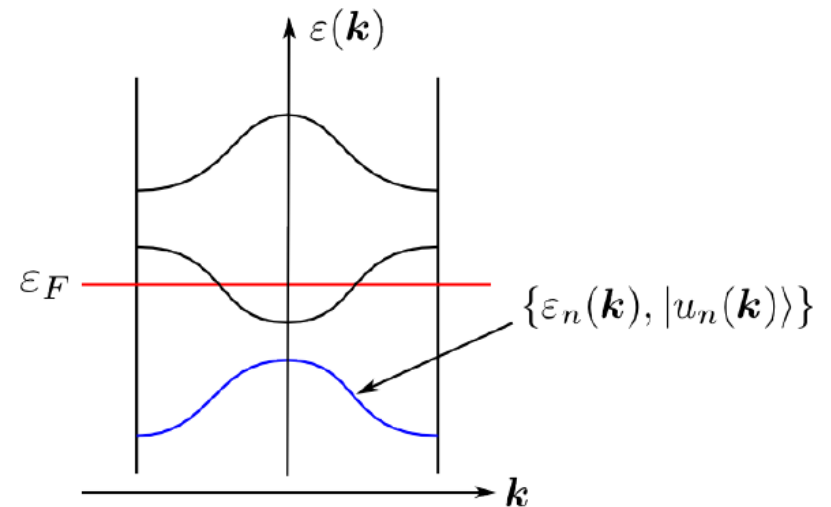
- 強磁場下の2次元電子系
- 完全に占有されたランダウ準位 ➡ 励起ギャップの空いた絶縁相
- 異なった絶縁相は量子化されたホール伝導度 (=トポロジカル不変量 [TKNN(82)、甲元(85)]) で区別される。
- 異なった絶縁相は量子相転移で隔てられている。



# TKNN公式

- ホール伝導度は運動量空間のトポロジカル不変量（チャーン数）と呼ばれるもので与えられる[TKNN(82)、甲元(85)]

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &= \frac{e^2}{h} \int \frac{d^2k}{2\pi} \nabla_{\mathbf{k}} \times i \langle u_n(\mathbf{k}) | \nabla_{\mathbf{k}} | u_n(\mathbf{k}) \rangle \\ &= \frac{e^2}{h} \times (\text{integer})\end{aligned}$$



- 運動量空間から波動関数の空間への写像への「巻き回数」を測る

# トポロジカル相とは

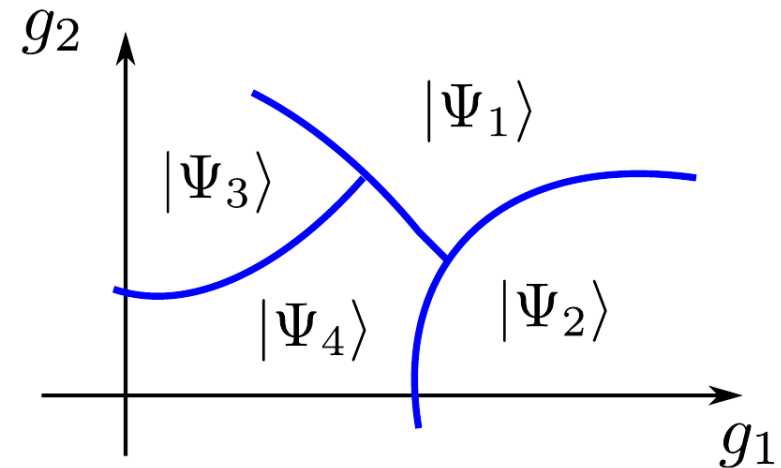
- (狭義には) 励起ギャップの空いた相
- トポロジカルに非自明な基底状態は自明な基底状態に連続的に変形できない。
- トポロジカル相は自明な相とは量子相転移で隔てられている。

絶対零度の相図：

$$H = H_0 + g_1 V_1 + g_2 V_2 + \dots$$

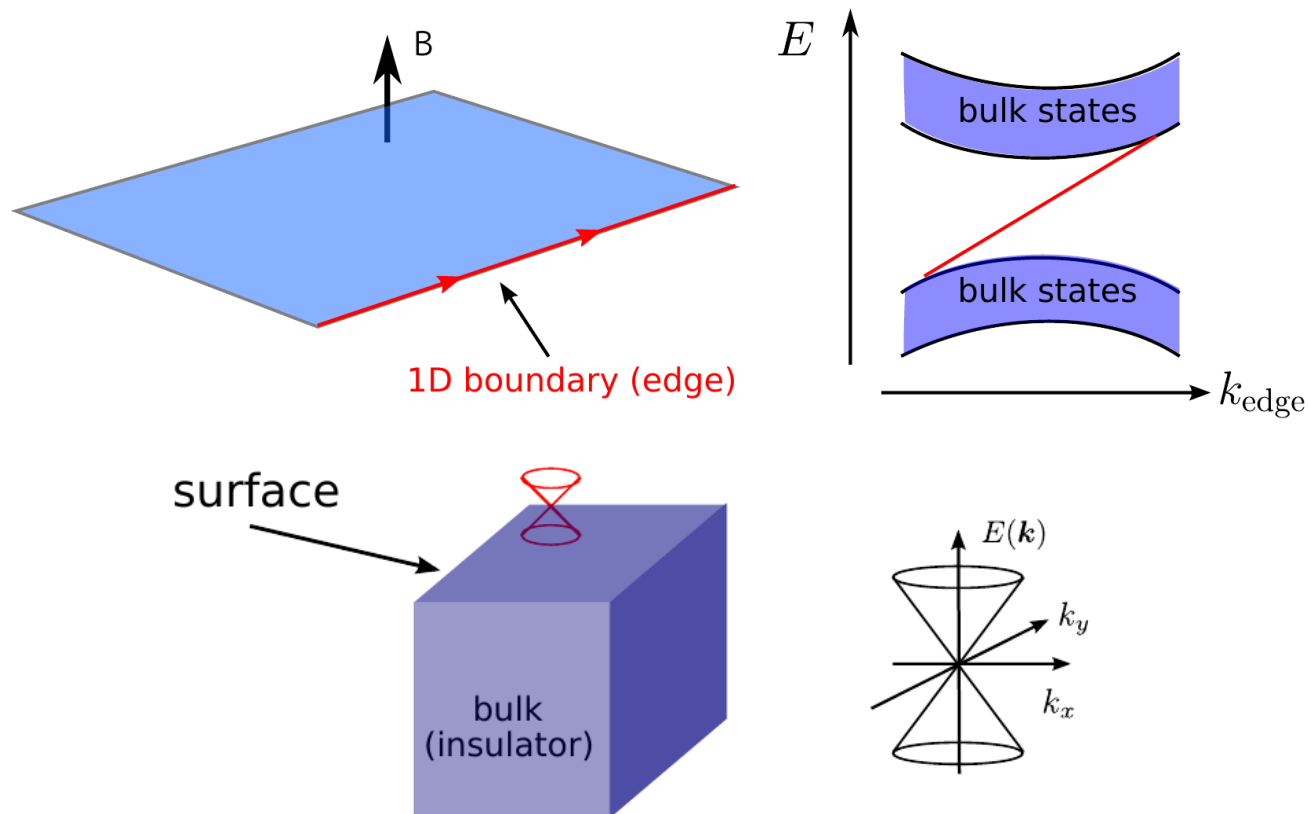
- 自明な状態 = 積状態

$$|\Psi\rangle = |\uparrow\uparrow\uparrow\dots\rangle$$

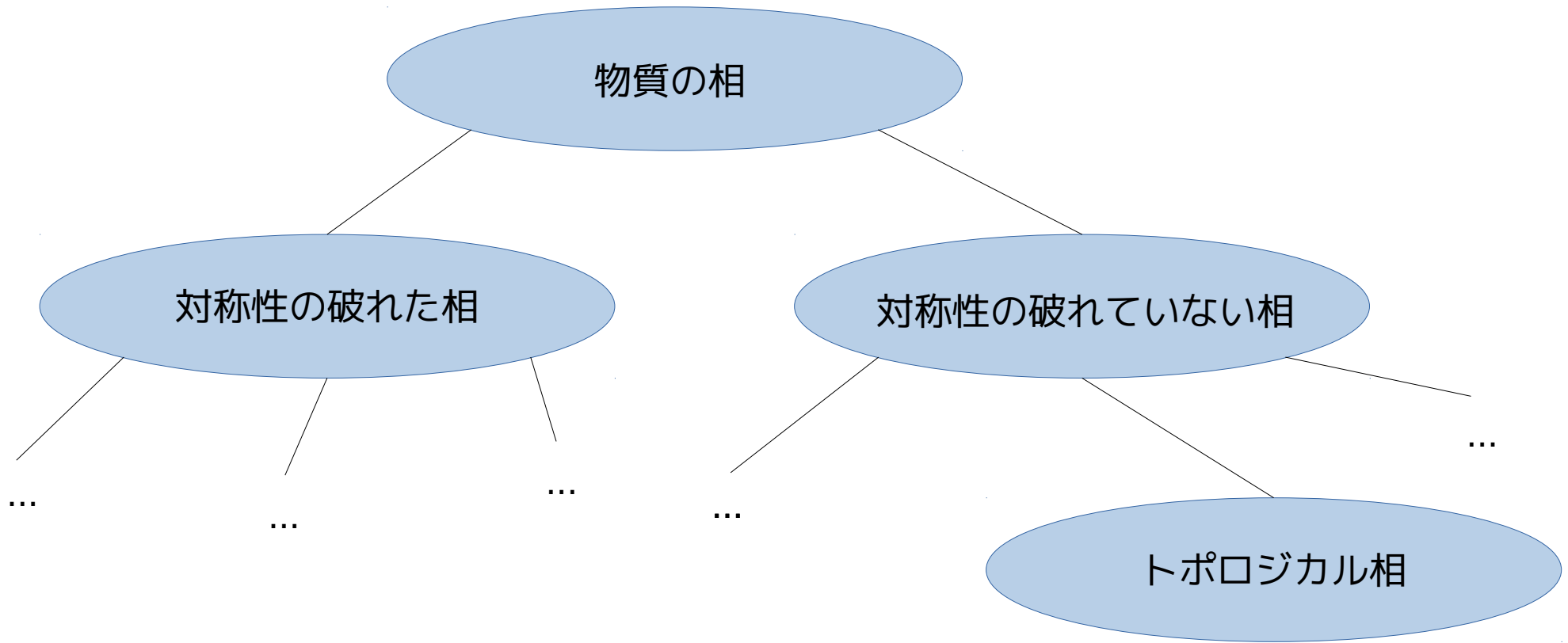


# バルク-境界対応

- トポロジカル相の波動関数は非自明な量子もつれを持つ。
- そのため系に境界を作ると境界に局在した状態が現れる。
- （相互作用の存在下では事情は少し複雑である。）



# トポロジカル相



- 量子ホール効果
- トポロジカル秩序相
- 対称性で保護されたトポロジカル相(SPT)
- ...

# トポロジーと凝縮系物理

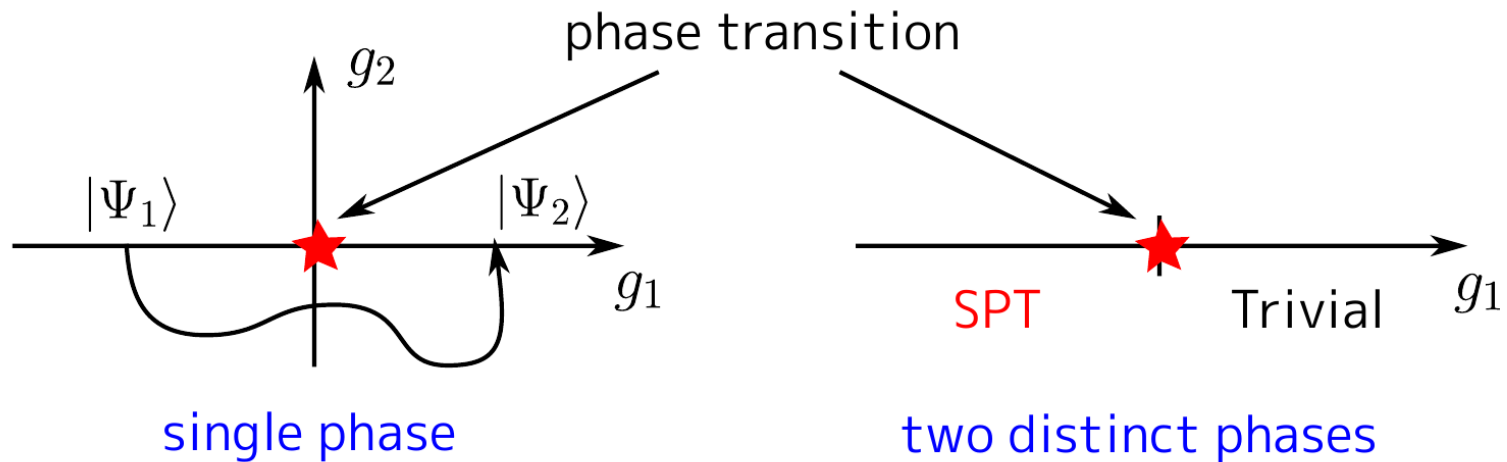
- 整数量子ホール効果 [Klitzing et al (80), TKNN (82)]
- 分数量子ホール効果 [Tsui et al. (82), Laughlin (83)]
- ハルデン相 [Haldane (83)]
- トポロジカル絶縁体 [Kane-Mele (05-06), Bernevig et al. (06), Konig et al (07), Fu-Kane-Mele (07), Roy(07),Hsieh et al (08)]
- トポロジカル超伝導体 [Mourik et al (12) Nadj-Perge et al (14)]
- トーリックコード（量子誤り訂正、トポロジカル量子計算） [Kitaev (97)]
- その他、高次のトポロジカル絶縁体、フラクトン、Kitaエフスピン流体、ギャップのないトポロジカル相、非エルミート系、フロケー系 ...

# トポロジーと凝縮系物理

- 整数量子ホール効果（短距離エンタングル相）
- 分数量子ホール効果（トポロジカル秩序相）
- ハルデン相（対称性で保護されたトポロジカル相、SPT相）
- トポロジカル絶縁体（SPT相）
- トポロジカル超伝導体（短距離エンタングル相、SPT相）
- トーリックコード（トポロジカル秩序相）

# 対称性で保護されたトポロジカル相

- Symmetry Protected Topological (SPT) Phases
- 対称性の存在下で、自明な状態に連続変形できない



# ハルデン相

- ハルデンスピン鎖（スピン 1 反強磁性スピン鎖）

$$H = J \sum_i \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{i+1}, \quad J > 0$$

- 基底状態：



$$\bullet \text{---} \bullet = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$$

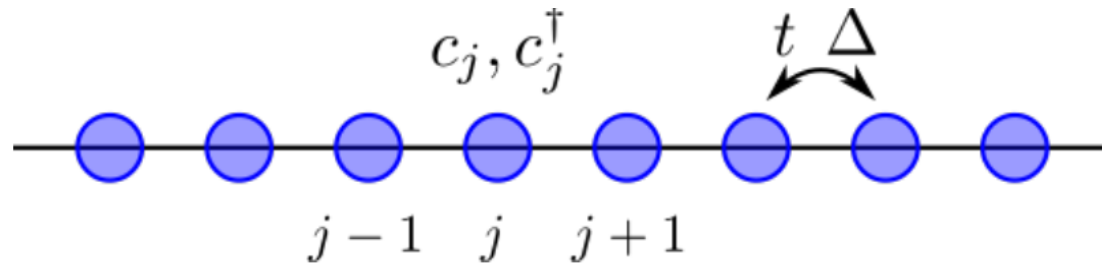
$$\bigcirc = |+\rangle\langle\uparrow\uparrow| + |0\rangle\frac{\langle\uparrow\downarrow| + \langle\downarrow\uparrow|}{\sqrt{2}} + |-\rangle\langle\downarrow\downarrow|$$

- 時間反転対称性下で非自明なSPT相である。

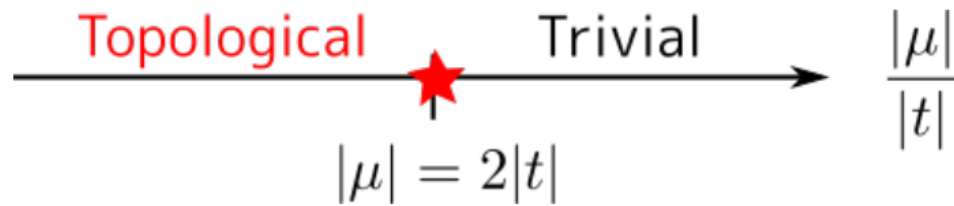
# トポロジカル超伝導体

- キタエフ鎖

$$H = \sum_j \left[ -tc_j^\dagger c_{j+1} + \Delta c_{j+1}^\dagger c_j^\dagger + h.c. \right] - \mu \sum_j c_j^\dagger c_j$$



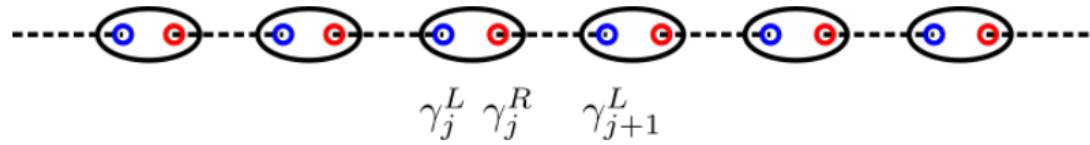
- 相図 ( $t = \Delta$  のとき) :



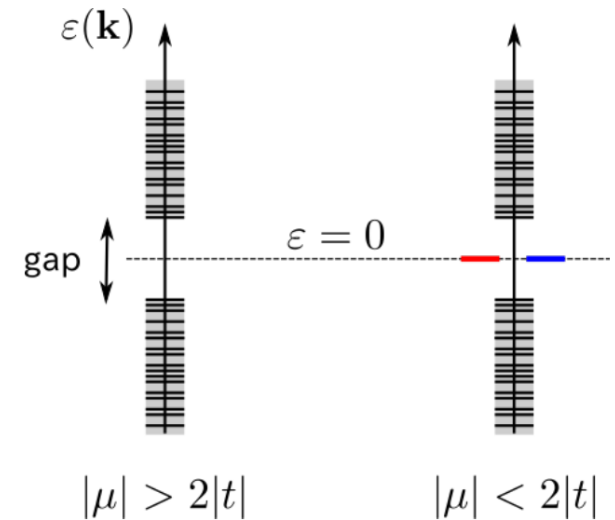
# キタエフ鎖

- 基底状態

$$c_j = \gamma_j^L + i\gamma_j^R, \quad c_j^\dagger = \gamma_j^L - i\gamma_j^R.$$



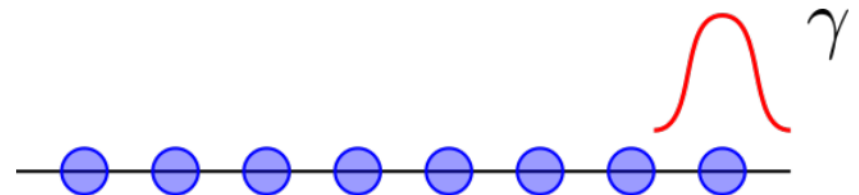
- 端状態：開放端条件でのスペクトル



- 端状態はマヨラナフェルミオン

$$\gamma \sim \int dr \left( u(r)c(r) + u^*(r)c^\dagger(r) \right)$$

$$\gamma^\dagger = \gamma$$



# 時間反転対称なキタエフ鎖

- 時間反転対称性の存在下で、整数値のトポロジカル数(相互作用無しの場合) [[Schnyder-SR-Furusaki-Ludwig \(08\)](#)]

$$T c_j T^{-1} = c_j \quad (T i T^{-1} = -i, T^2 = 1)$$

- 具体的な構成：

$$\mathcal{H}(k) = \begin{pmatrix} 0 & D(k) \\ D^\dagger(k) & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} D D^\dagger u_a = \lambda^2 u_a \\ D^\dagger D v_a = \lambda^2 v_a \end{cases}$$

$$q(k) = \sum_a u_a(k) v_a^\dagger(k) \\ \in U(m)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi i} \text{tr } q(k) \frac{\partial q(k)}{\partial k} = \text{integer}$$

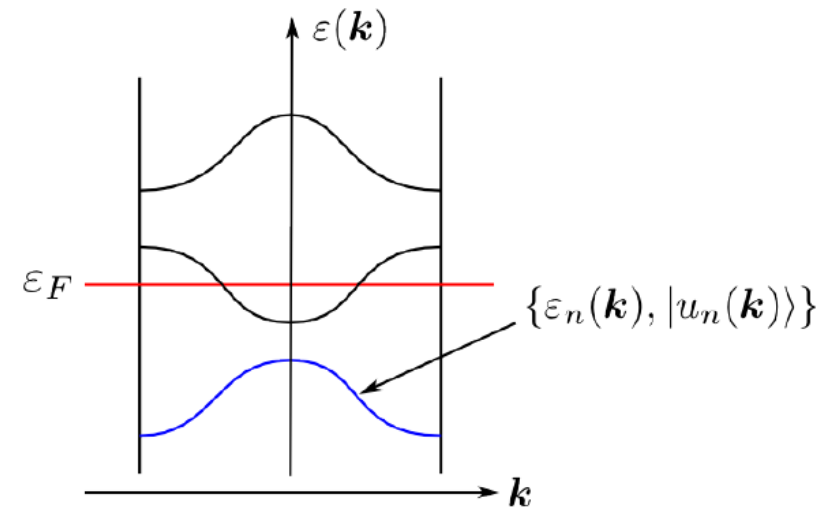
- トポロジカル絶縁体と超伝導体のトポロジカル不変量
- 相互作用の効果
- 部分転置

# トポロジカル絶縁体・超伝導体の トポロジカル不変量

- バンド描像に基づいたトポロジカル不変量の構成

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &= \frac{e^2}{h} \int \frac{d^2 k}{2\pi} \nabla_{\mathbf{k}} \times i \langle u_n(\mathbf{k}) | \nabla_{\mathbf{k}} | u_n(\mathbf{k}) \rangle \\ &= \frac{e^2}{h} \times (\text{integer})\end{aligned}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi i} \text{tr} q(k) \frac{\partial q(k)}{\partial k} = \text{integer}$$



- TKNN公式、Kane-Mele、Fu-Kane-Mele公式
- 相互作用の効果？

# トポロジカル不変量と相互作用効果

- ～2010年代初頭まで、多くの研究は単一粒子描像に基づく。
- 単一粒子描像の破れ [Fidkowski-Kitaev(10)]
- 場の理論による定式化 [Kapustin et al (14-15), Freed-Hopkins (14-15), Witten (15), and others]
- 部分転置によるトポロジカル不変量の構成

Hassan Shapourian氏、塩崎謙氏、五味清紀氏との共同研究

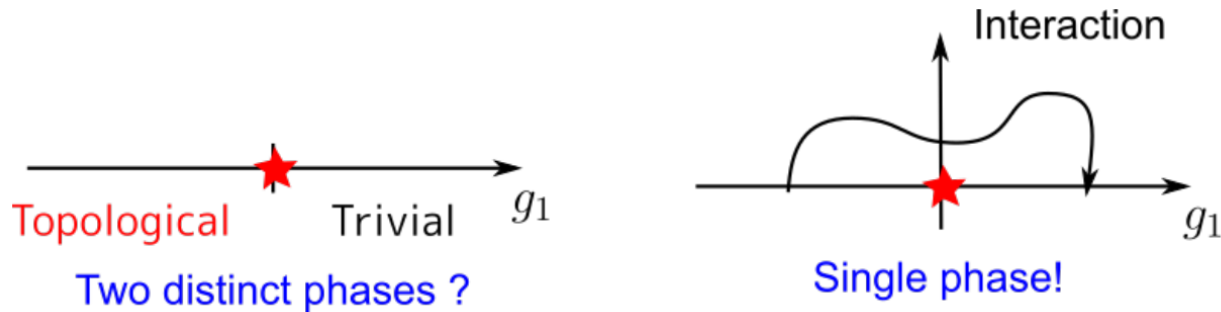
[Shapourian-Shiozaki-SR (17), Shiozaki-Shapourian-SR (17), Shiozaki-Shapourian-Gomi-SR (18)]

# キタエフ鎖と相互作用

- キタエフ鎖
 
$$H = \sum_j \left[ -tc_j^\dagger c_{j+1} + \Delta c_{j+1}^\dagger c_j^\dagger + h.c. \right] - \mu \sum_j c_j^\dagger c_j$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi i} \text{tr } q(k) \frac{\partial q(k)}{\partial k} = \text{integer}$$

- トポロジカル不変量が8の倍数の時、相互作用の下で、トポロジカル超伝導体相は不安定[Fidkowski-Kitaev(10)]



- 部分転置による多体のトポロジカル不変量の構成

# 部分転置

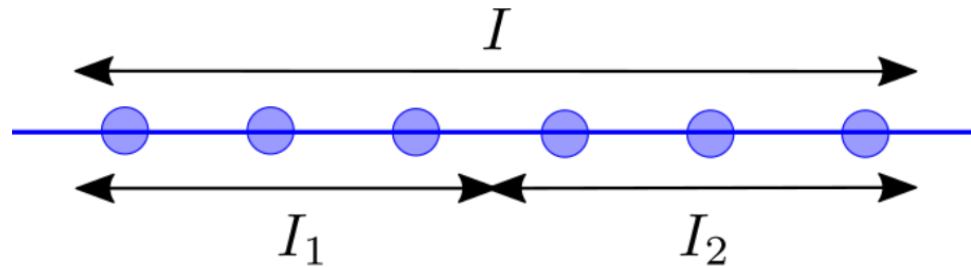
- 定義：複合系  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  に作用する演算子  $M$  の、Bに関する部分転置  $M^{T_B}$  を、

$$\langle e_i^{(A)} e_j^{(B)} | M^{T_B} | e_k^{(A)} e_l^{(B)} \rangle := \langle e_i^{(A)} e_l^{(B)} | M | e_k^{(A)} e_j^{(B)} \rangle$$

で定義する。（ $|e_i^{(A,B)}\rangle$  は  $\mathcal{H}_{A,B}$  の基底）

- C.f. 部分トレース
- 転置＝時間反転
- フェルミオン系の場合、フェルミ統計性を正しく考慮する必要がある（後述）。[Shapourian-Shiozaki-SR (17-18)]

# トポロジカル超伝導体のトポロジカル不変量



- Step 1: The reduced density matrix for an interval  $I$ ,  
 $\rho_I := \text{Tr}_{\bar{I}} |\Psi\rangle\langle\Psi|$ .
- Step 2: Bipartition  $I$  into two *adjacent* intervals,  $I = I_1 \cup I_2$ .
- Step 3: Take *fermionic partial transpose* acting only on  $I_1$ ;  
 $\rho_I \longrightarrow \rho_I^{T_1}$ .
- Step 4: The invariant is given by the phase of  $Z = \text{Tr}(\rho_I \rho_I^{T_1})$

# なにを計算しているか？

- 場の理論的解釈：量子化ホール伝導度は経路積分に現れるチャーン・サイモンズ項の係数を計算する

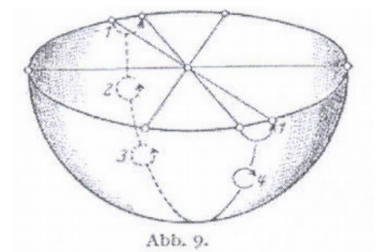
$$Z(A^{ex}) = \int \mathcal{D}[\psi^\dagger, \psi] e^{-S(A^{ex}, \psi^\dagger, \psi)} = e^{-I_{eff}(A^{ex})}$$

$$I_{eff}(A) = \frac{ik}{4\pi} \int d\tau dx dy \varepsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda, \quad k = \text{integer}$$

- 時間反転対称性で保護されたSPT相：向き付け不能な時空での経路積分（今の場合2次元射影空間）

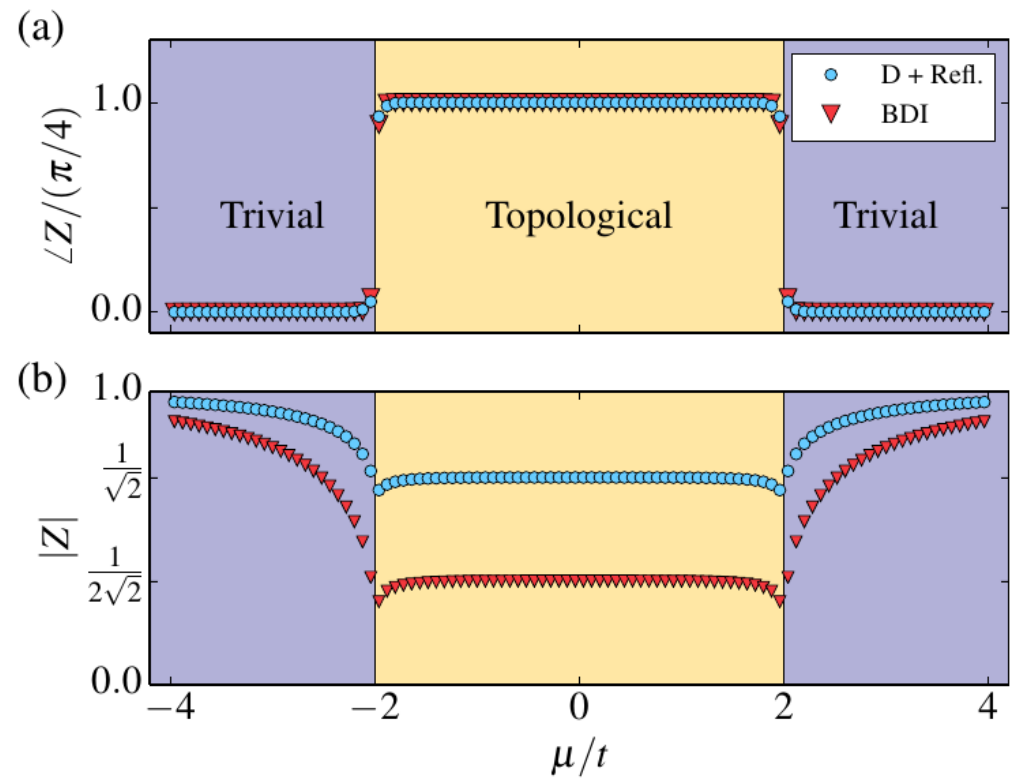
$$Z(\mathbb{R}P^2) = \int \mathcal{D}[\psi^\dagger, \psi] e^{-S(\mathbb{R}P^2, \psi^\dagger, \psi)} \sim e^{2\pi i \nu / 8}$$

- 行列積波動関数による解釈



# 計算例

- キタエフ鎖での計算例

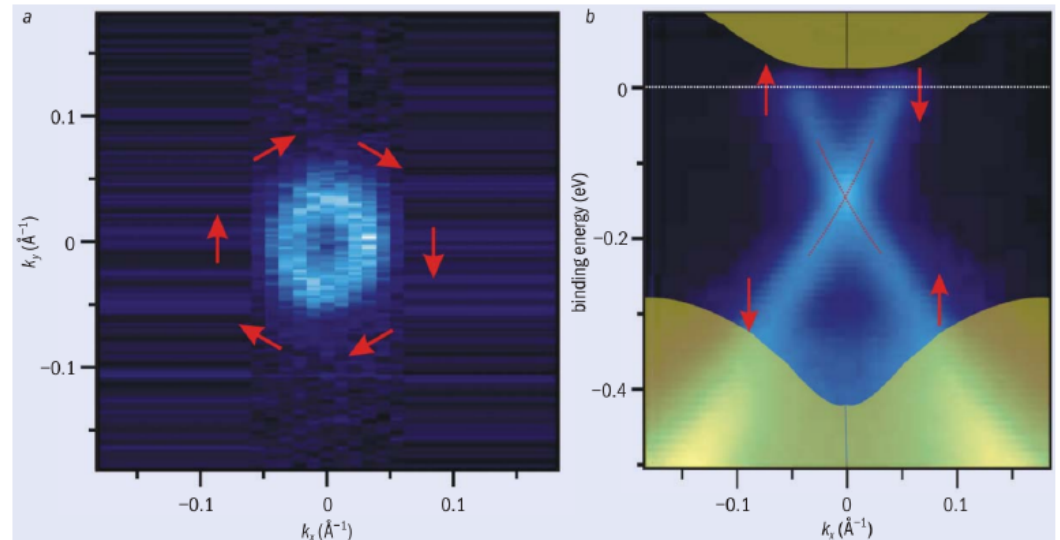
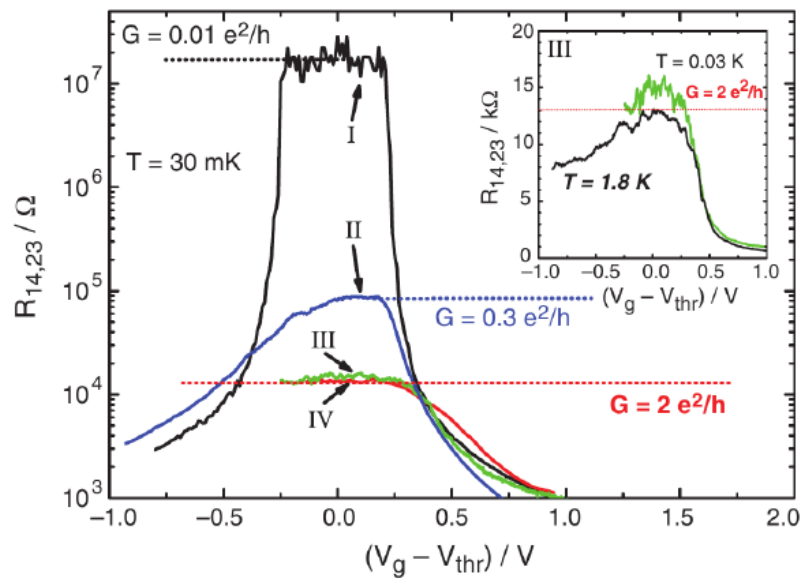


- $Z$ の位相は1の8重根に量子化している

$$Z = \text{Tr}[\rho_I \rho_I^{T_1}] = e^{2\pi i \nu / 8}$$

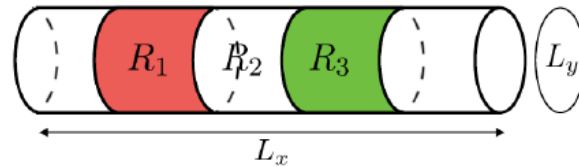
# トポロジカル絶縁体

- 時間反転対称性下で非自明な絶縁体 [Kane-Mele, Bernevig-Zhang, Bernevig-Hughes-Zhang, König et al (07), Fu-Kane-Mele, Roy, Hsieh et al (07)]



# トポロジカル絶縁体のトポロジカル不変量

- 部分転置による構成

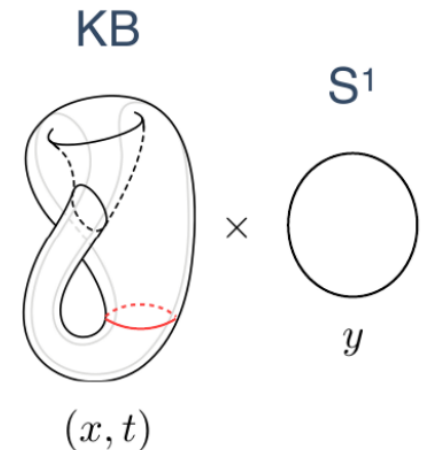


$$Z = \text{Tr}_{R_1 \cup R_3} \left[ \rho_{R_1 \cup R_3}^+ C_T^{I_1} [\rho_{R_1 \cup R_3}^-]^{\text{T}_1} [C_T^{I_1}]^\dagger \right],$$

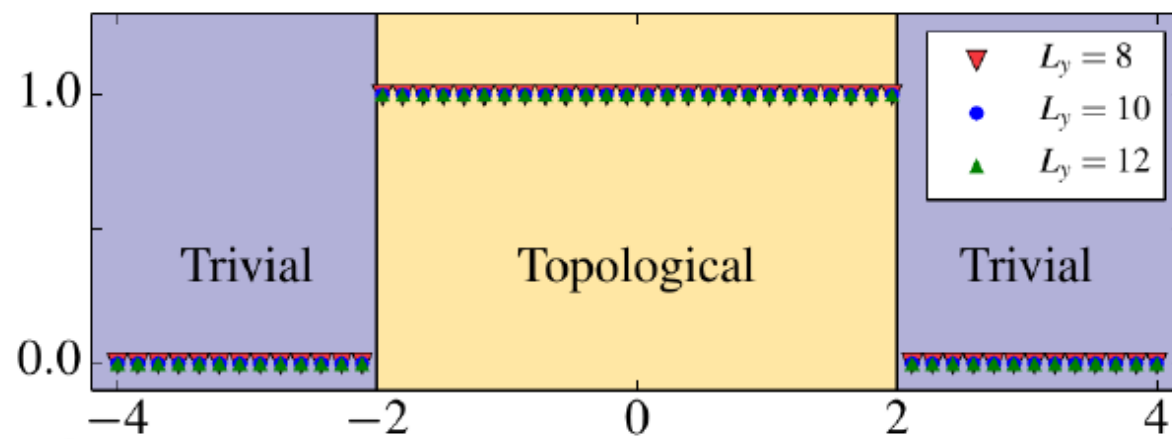
$$\rho_{R_1 \cup R_3}^\pm = \text{Tr}_{R_1 \cup R_3} \left[ \underbrace{e^{\pm \sum_{\mathbf{r} \in R_2} \frac{2\pi i y}{L_y} n(\mathbf{r})}}_{\text{partial } U(1) \text{ twist}} |GS\rangle \langle GS| \right]$$

$$C_T \sim \text{spin flip unitary}$$

- 場の理論的解釈：クラインの坪上の分配関数



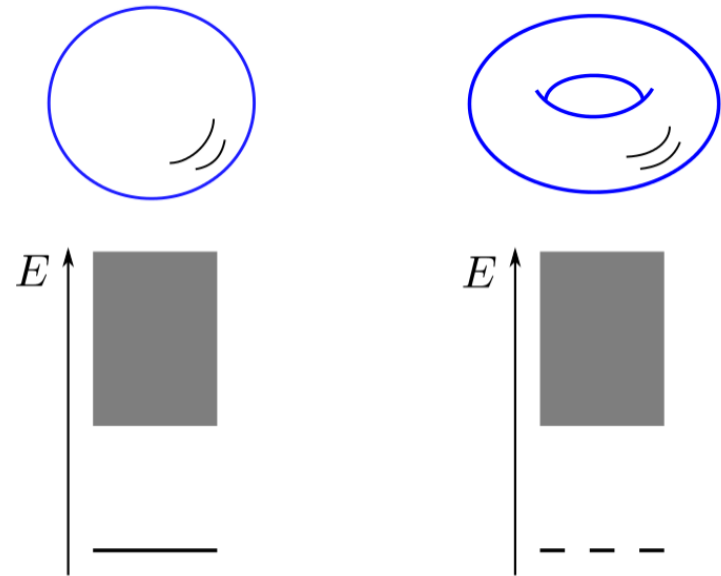
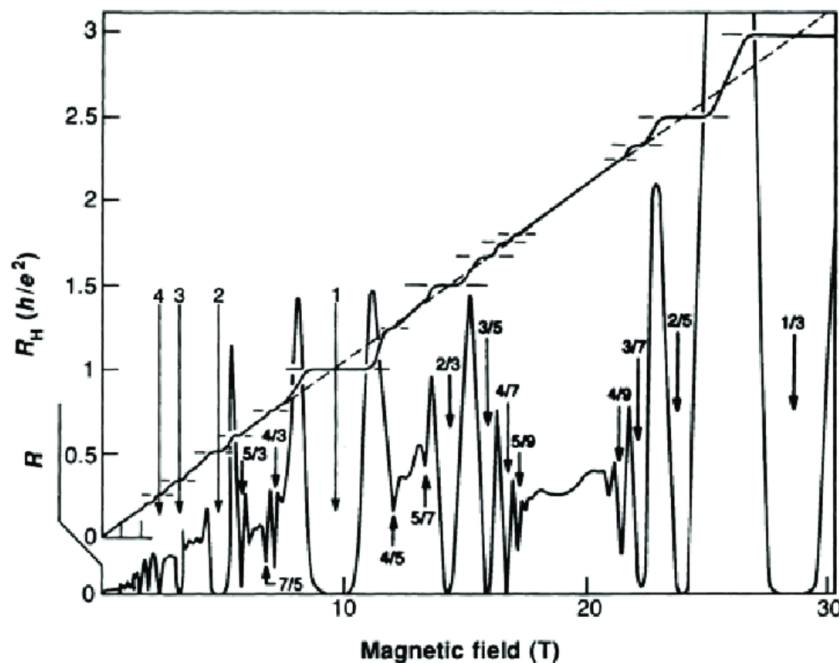
- 計算例



- トポロジカル相と量子もつれ、そして部分転置
- エニオンに対する部分転置

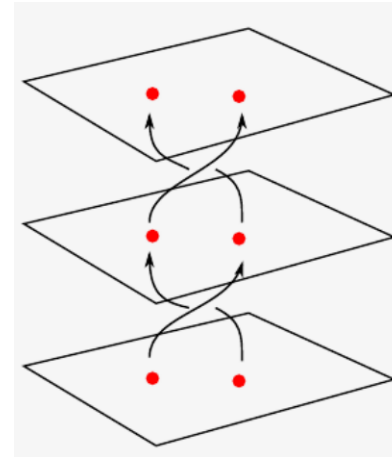
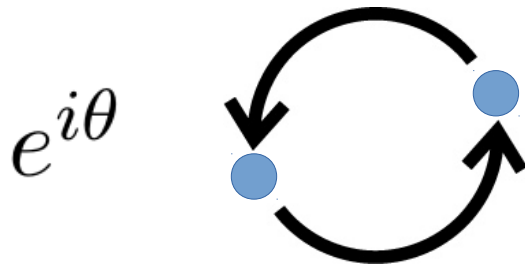
# トポロジカル秩序相

- 強い相互作用下で存在するトポロジカル相には、**トポロジカル秩序**を示すものがある。
- トポロジカル秩序～空間のトポロジーに依存した基底状態の縮退
- 例：分数量子ホール効果



# トポロジカル秩序相

- トポロジカル秩序相には、非可換統計に従う準粒子、**エニオン**、が存在する。



- エニオンの性質（統計性 etc.）がトポロジカル秩序相を特徴づける。

	自発的対称性の破れた相	トポロジカル相
基底状態	対称性の破れに伴う縮退	トポロジカル縮退
励起状態	南部・ゴールドストーンボソン	エニオン
有効理論	ギンツブルグ・ランダウ理論	位相的場の理論

# エニオンの実験による観測




nature  
physics

ARTICLES

<https://doi.org/10.1038/s41567-020-1019-1>

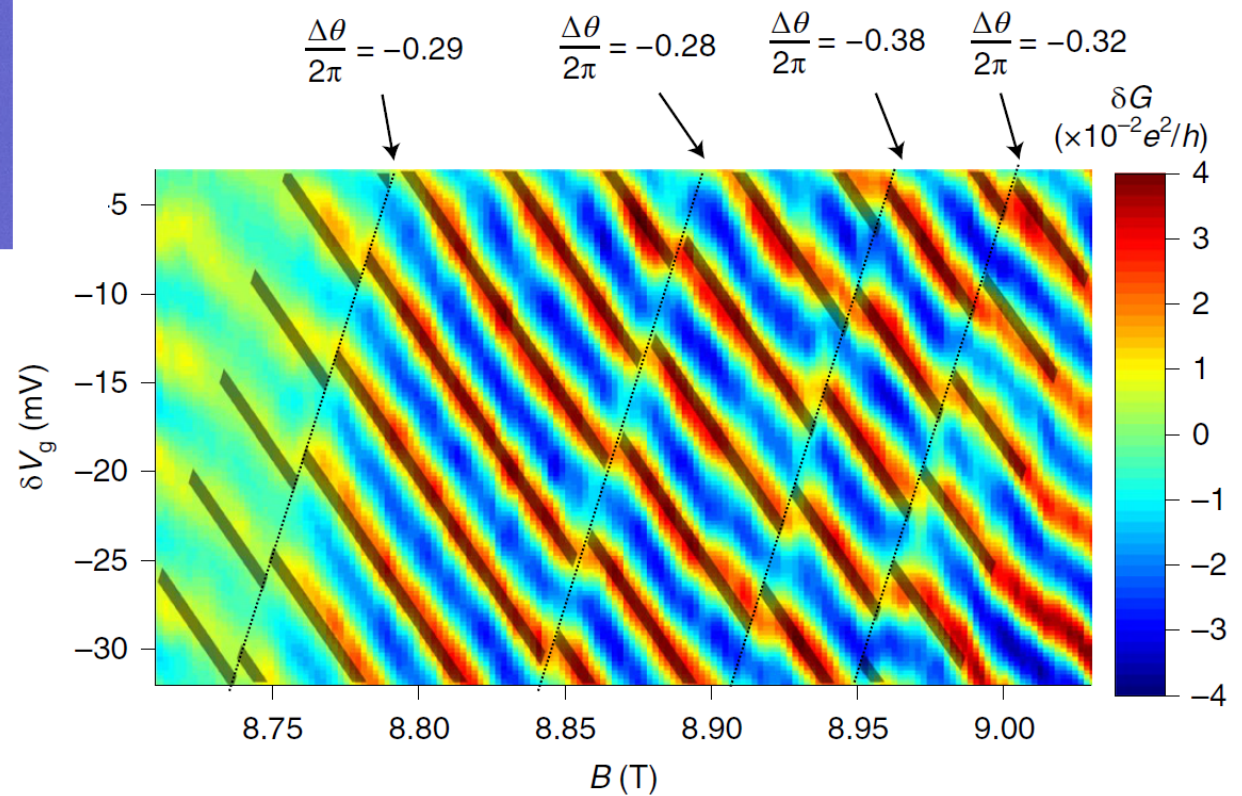
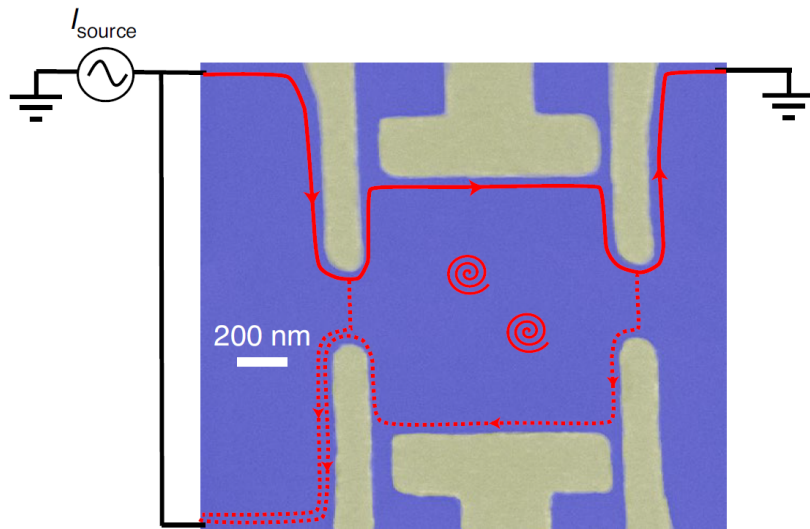
 Check for updates

## Direct observation of anyonic braiding statistics

J. Nakamura<sup>1,2</sup>, S. Liang<sup>1,2</sup>, G. C. Gardner<sup>2,3</sup>  and M. J. Manfra<sup>1,2,3,4,5</sup>  

**Anyons are quasiparticles that, unlike fermions and bosons, show fractional statistics when two of them are exchanged. Here, we report the experimental observation of anyonic braiding statistics for the  $\nu = 1/3$  fractional quantum Hall state by using an electronic Fabry-Perot interferometer. Strong Aharonov-Bohm interference of the edge mode is punctuated by discrete phase slips that indicate an anyonic phase  $\theta_{\text{anyon}} = 2\pi/3$ . Our results are consistent with a recent theory that describes an interferometer operated in a regime in which device charging energy is small compared to the energy of formation of charged quasiparticles, which indicates that we have observed anyonic braiding.**

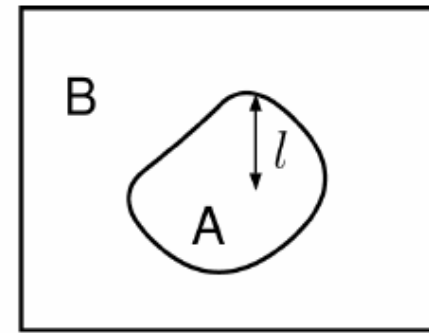
# エニオンの実験による観測



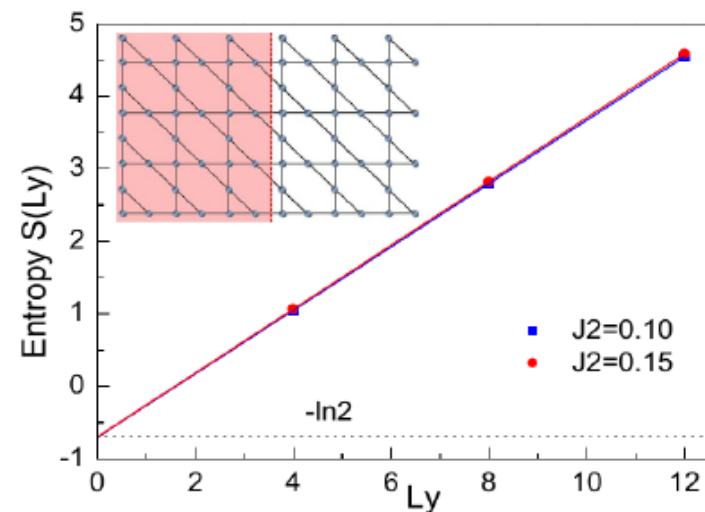
# トポロジカル相とエンタングルメント

- トポロジカルエンタングルメントエントロピー [Kitaev-Preskill (06), Levin-Wen (06)]

$$\begin{aligned} S_A &= -\text{Tr } \rho_A \log \rho_A \\ &= \text{const.} \times \ell - \gamma \end{aligned}$$



- $\gamma$  (= 「合計量子次元」 ) はトポロジカル不変量



[Jiang-Wang-Balents (12)]

# 量子もつれと部分転置

- エンタングルメントエントロピーは、純粋状態の量子もつれを特徴付けるの有効。
- 一方、混合状態（密度行列）に対しては、エンタングルメントエントロピーは、量子相関と古典相関の両者に依ってしまう。
- 混合状態の量子もつれの特徴づけに、部分転置を使うアイデアがある。[Peres (96), Horodecki-Horodecki-Horodecki (96), Eisert-Plenio (99), Vidal-Werner (02), Plenio (05) ...]

# 量子もつれと部分転置

- ベル状態： $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|01\rangle - |10\rangle]$

$$\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi| = \frac{1}{2} [|01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10| - |01\rangle\langle 10| - |10\rangle\langle 01|]$$

量子もつれをどのように特徴づけるか？

- 部分転置：

$$\rho^{T_2} = \frac{1}{2} [|01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10| - \underline{|00\rangle\langle 11|} - \underline{|11\rangle\langle 00|}]$$

- 部分転置で影響される  $\Rightarrow$  量子もつれあり  
部分転置で影響されない  $\Rightarrow$  量子もつれなし
- 負固有値の存在： $\text{Spec}(\rho^{T_1}) = \{1/2, 1/2, 1/2, -1/2\}$ .
- C.f. 古典的な状態：

# エンタングルメントネガティビティ

- 部分転置であらわれる負固有値を使って、エンタングルメントネガティビティを次で定義する：

$$\mathcal{N}(\rho) := \sum_{\lambda_i < 0} |\lambda_i| \quad \mathcal{E}(\rho) := \log(2\mathcal{N}(\rho) + 1)$$

- ネガティビティは量子相関のみを検出する。
- N.B. ネガティビティで検出できない量子もつれもある。

## Five open problems in theory of quantum information

Paweł Horodecki,<sup>1, 2, 3</sup> Łukasz Rudnicki,<sup>1, 4, 3, \*</sup> and Karol Życzkowski<sup>5, 4, 3</sup>

**Problem 4:** *Establish whether there exist bound entangled states with negative partial transpose.*

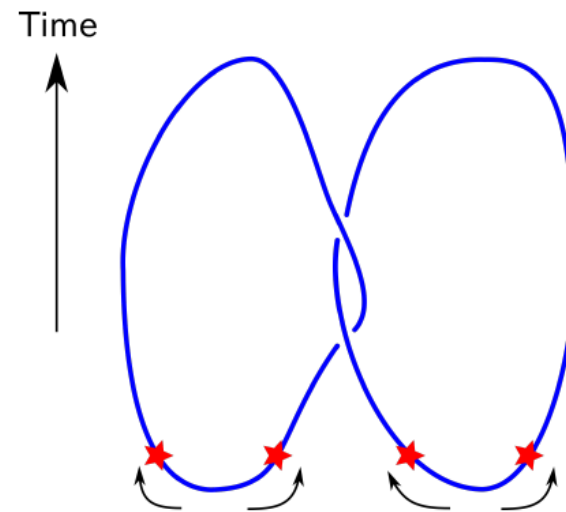
# 部分転置と粒子統計

- 部分転置の定義は粒子の統計性による！
- フェルミオン系における部分転置 [[Shapourian-Shiozaki-SR\(17\)](#)]
- エニオン？ [[Shapourian-Mong-SR\(20\)](#)]

# 工ニオンに対する部分転置

- 工ニオンの世界線を使って考える

- 工ニオンのEPR状態：  $a$   $\bar{a}$



- 密度行列と部分転置

$$\rho = \frac{1}{d_a} \begin{array}{c} a \quad \bar{a} \\ \text{---} \\ a \quad \bar{a} \end{array}$$

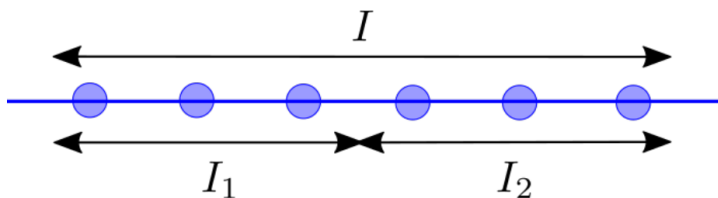
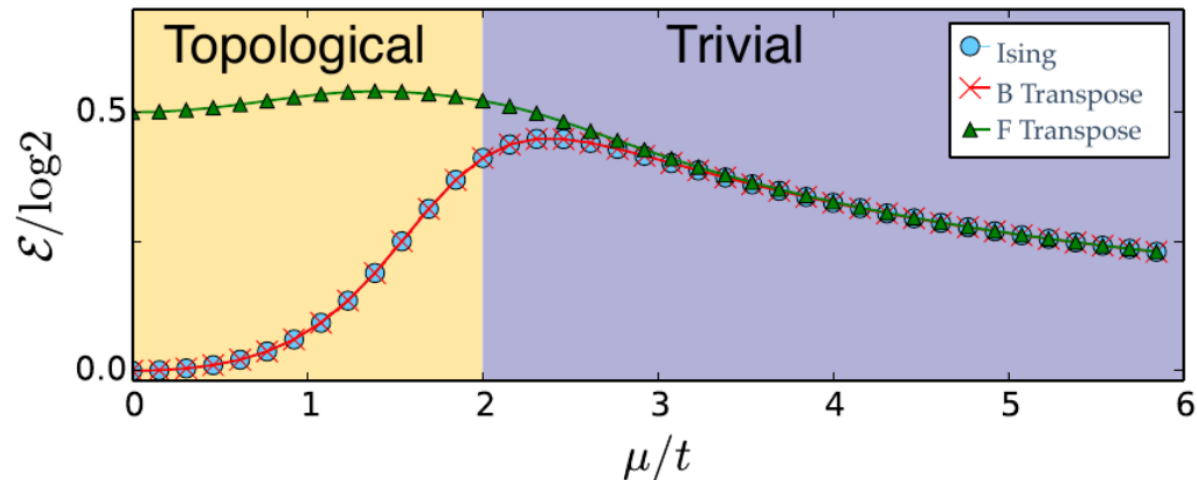
$$\rho^{T_2} = \frac{1}{d_a} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array}$$

# キタエフ鎖におけるネガティビティ

- フェルミオン系の部分転置：

$$\begin{aligned} & \langle \{n\}_A, \{n\}_B | \rho^{T_B} | \{m\}_A, \{m\}_B \rangle \\ &= (-1)^{\phi(\{n\}, \{m\})} \langle \{n\}_A, \{m\}_B | \rho | \{m\}_A, \{n\}_B \rangle \end{aligned}$$

- キタエフ鎖：



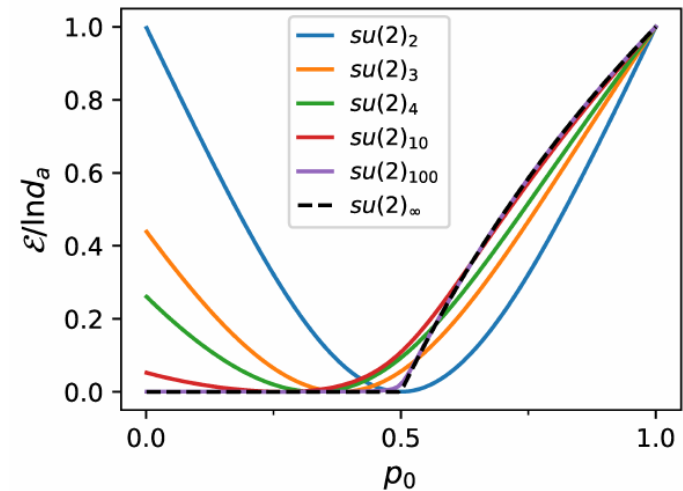
青、赤：ボゾン系の部分転置  
 緑：フェルミオン系の部分転置

# 2エニオンのネガティビティ

- 計算例: SU(2) level k エニオン

$$\rho = \frac{4p-1}{3} |EPR\rangle\langle EPR| + \frac{1-p}{3} I$$

$$\rho = \frac{p_I}{\sqrt{d_{\frac{1}{2}}^2 d_0^2}} \begin{array}{c} \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} 0 \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \end{array} + \frac{(1-p_I)}{\sqrt{d_{\frac{1}{2}}^2 d_1^2}} \begin{array}{c} \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} 1 \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \end{array}$$



- エニオン系ではゼロネガティビティ (=量子もつれ無し) は密度行列の空間の「点」上でおこる。
- エニオン系のネガティビティが量子もつれ測度であることの証明

# まとめ

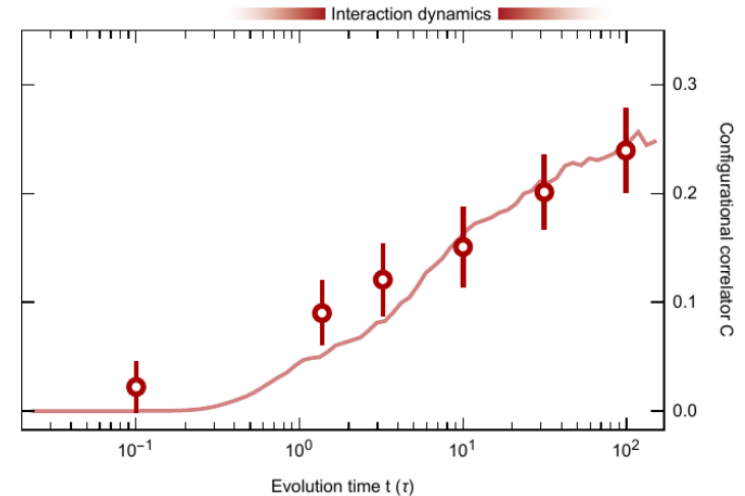
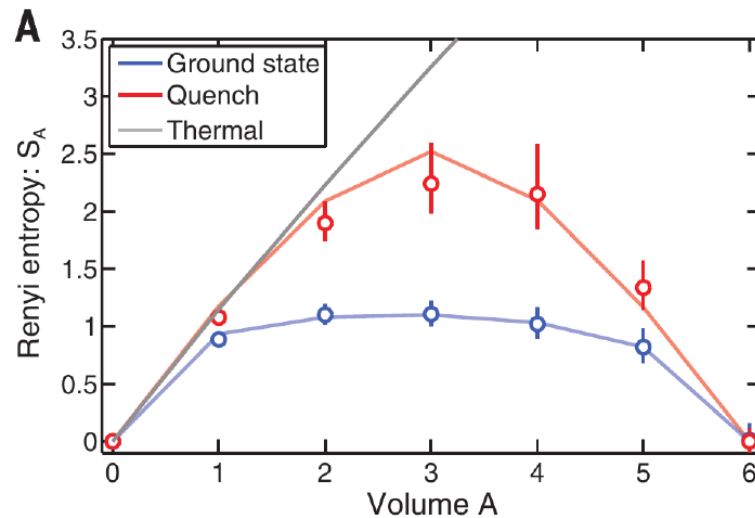
- 部分転置を使い、時間反転対称性で保護されたトポロジカル相のトポロジカル不変量を構成することができる。
- 部分転置は粒子の統計性に依る。
- エニオン（フェルミオンを含む）系の部分転置、および、エンタングルメントネガティビティを構成した。

# 展望

- トポロジカル不変量の数値計算への応用
- エニオンの多体系への応用
- トポロジカル不変量、ネガティビティの実験的観測
- ネガティビティの多体物理における応用（有限温度のトポロジカル相、非平衡プロセス）
- ネガティビティとホログラフィック双対[Kudler-Flam-SR(18), Kusuki-Kudler-Flam-SR (19), ...]

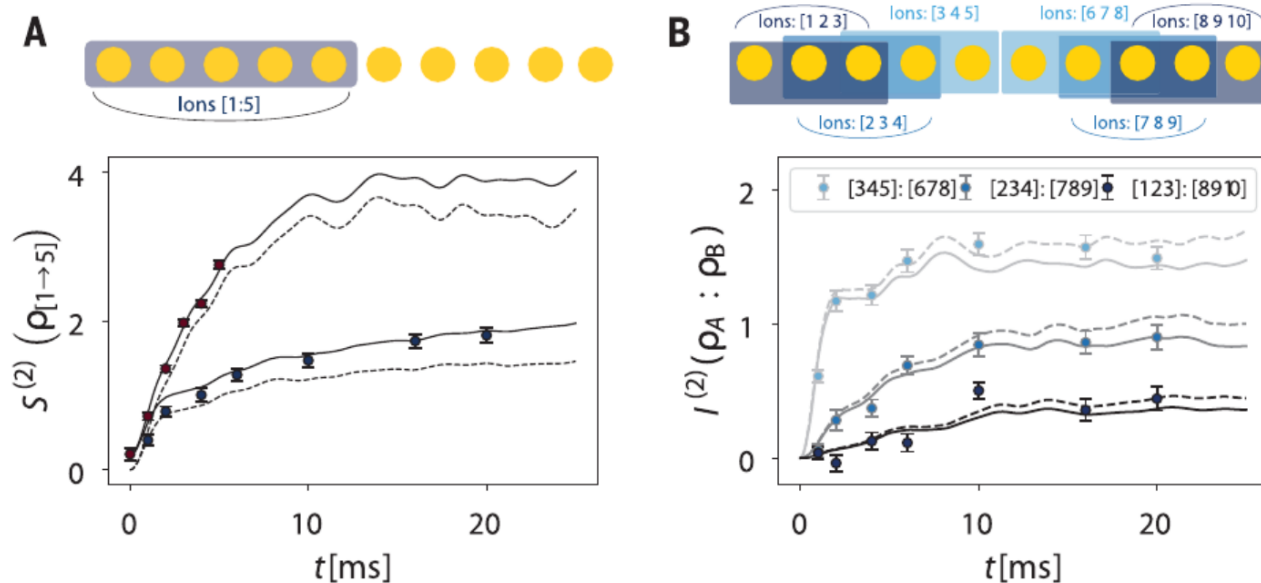
# エンタングルメントの測定

- Swap interferometer [Islam et al (15), Kaufman et al (16), Lukin et al (18)]



# ランダム測定によるエンタングルメントの測定

- Randomized measurement [Brydges (19)]



- 部分転置を含む量（ネガティビティ、トポロジカル不変量）に対するプロトコルも提案されている。[Zhou et al (20), Elben (20), Elben et al (20) ...]