

KEK物構研コロキウム

量子振り子の開発と応用

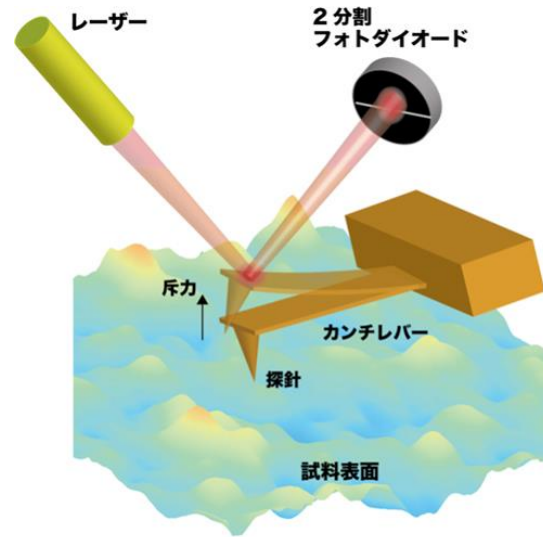
学習院大学 理学部物理学科 准教授
松本 伸之 2021/10/8

力のセンサー

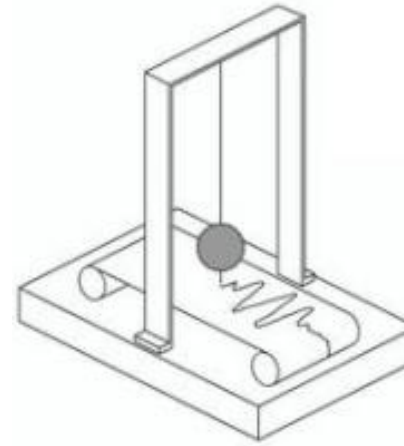
慣性センサー



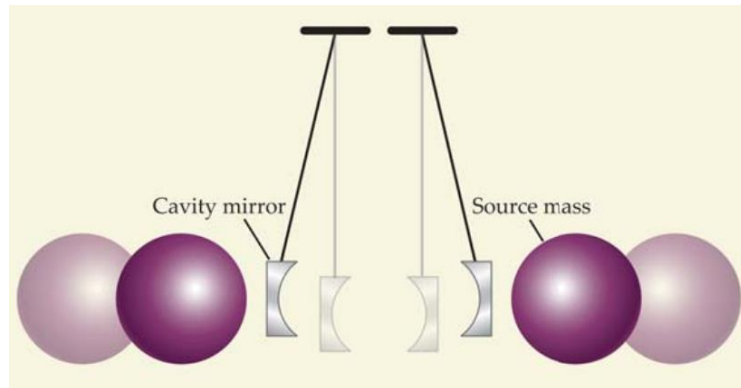
原子間力顕微鏡



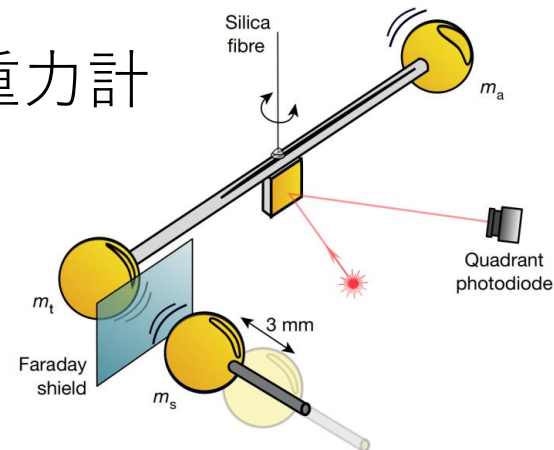
地震計



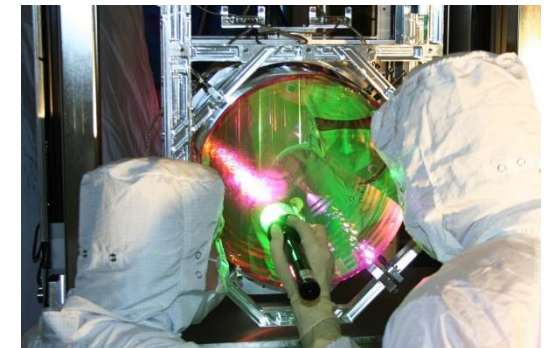
重力勾配計



重力計



重力波望遠鏡

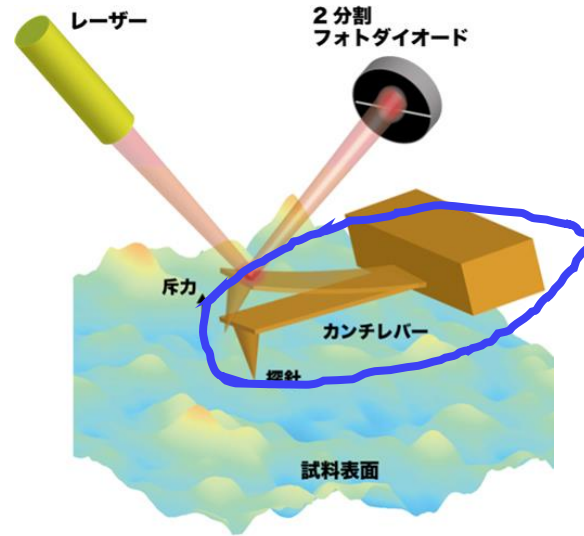


力のセンサー

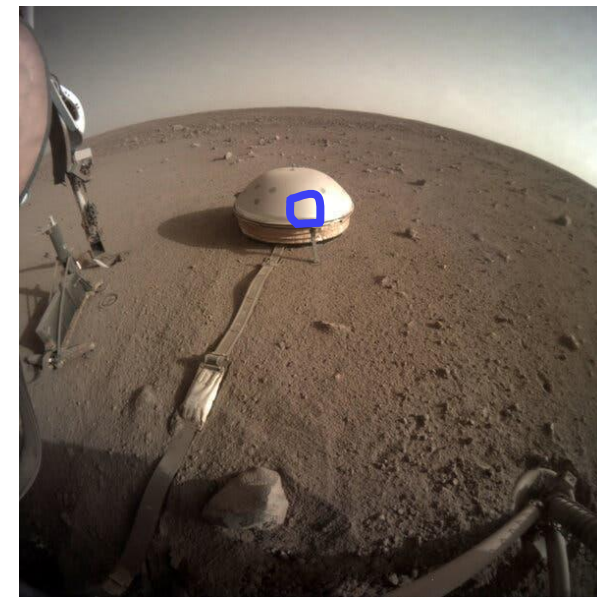
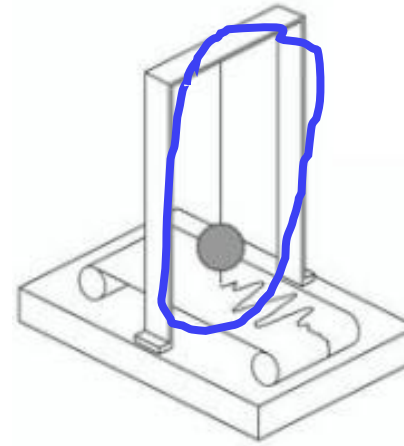
慣性センサー



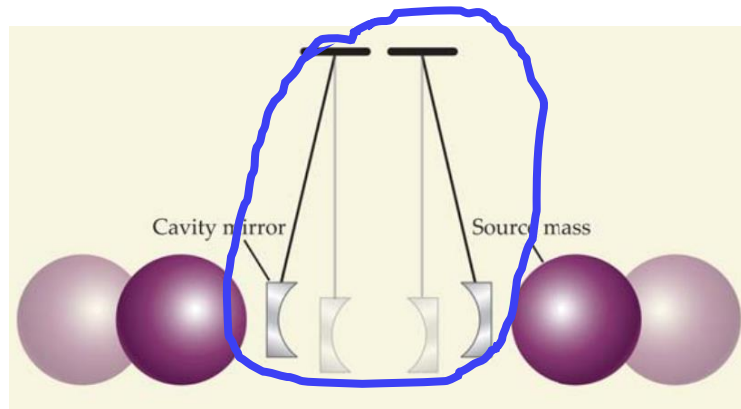
原子間力顕微鏡



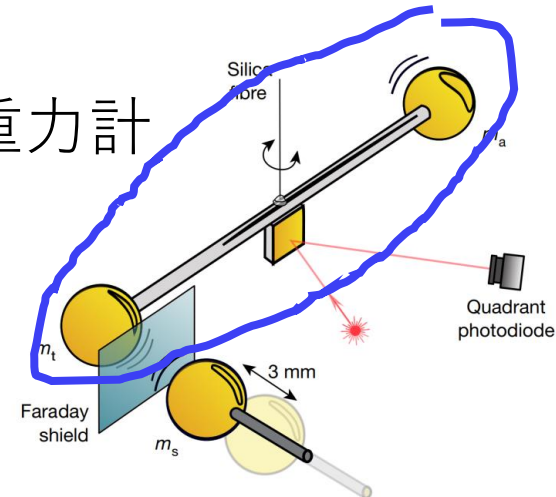
地震計



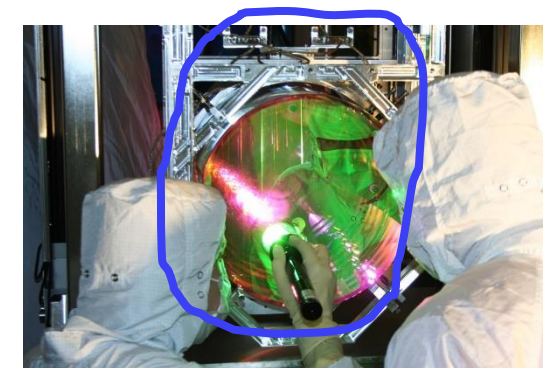
重力勾配計



重力計



重力波望遠鏡

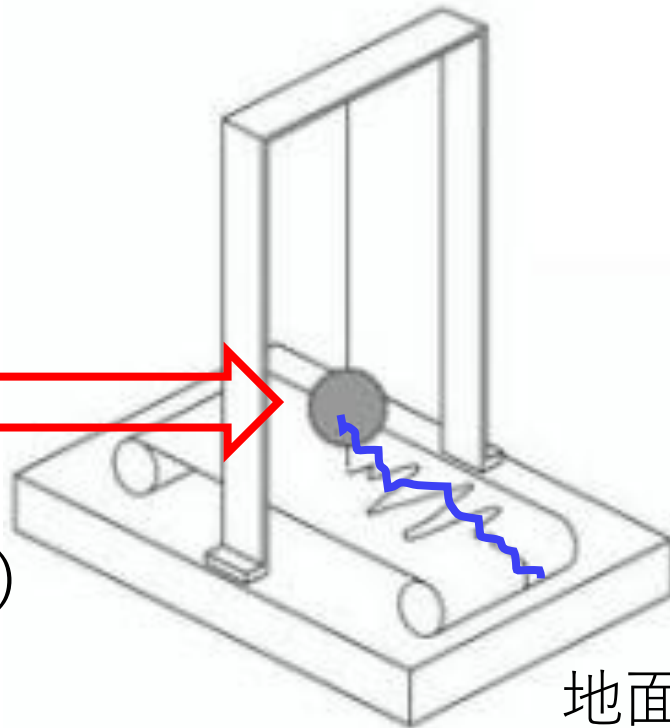


力の雑音

- 振り子・ねじれ振り子・カンチレバー・MEMS…

原理的な雑音：ブラウン運動

熱的な揺動力
 \propto 散逸
(**揺動散逸定理**)



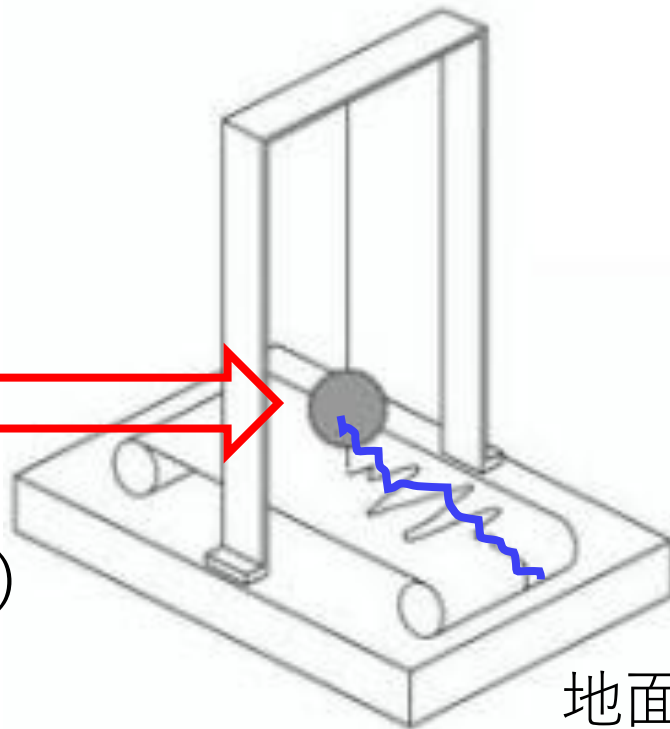
地面の揺れとか風とかを取り除くと、
ブラウン運動が観測される

力の雑音

- 振り子・ねじれ振り子・カンチレバー・MEMS…

原理的な雑音：ブラウン運動

熱的な揺動力
 \propto 散逸
(揺動散逸定理)



運動方程式

$$m\ddot{x} = -kx - m\gamma\dot{x} + \xi$$

$$\langle \xi^2 \rangle \propto k_B T \gamma$$

ξ : 熱的揺動力 (力の雑音)

γ : 散逸

γ, T が小さいと嬉しい

地面の揺れとか風とかを取り除くと、
ブラウン運動が観測される

測定器

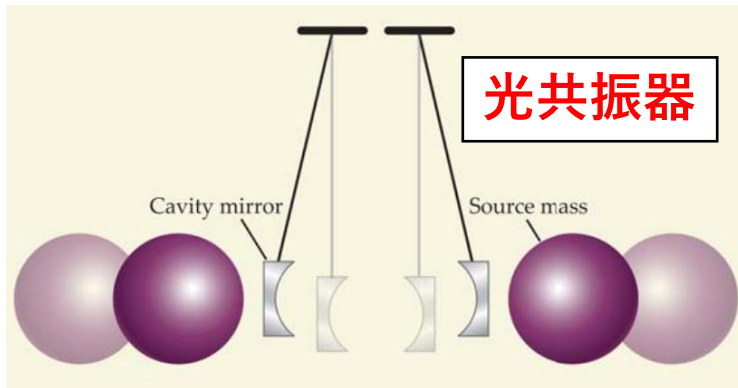
慣性センサー



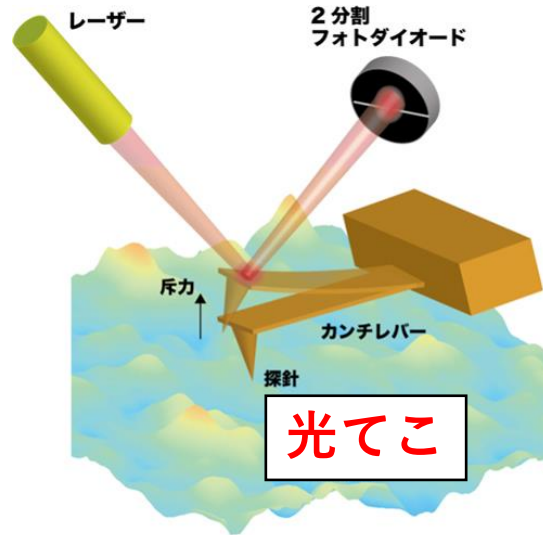
静電型トランスデューサー



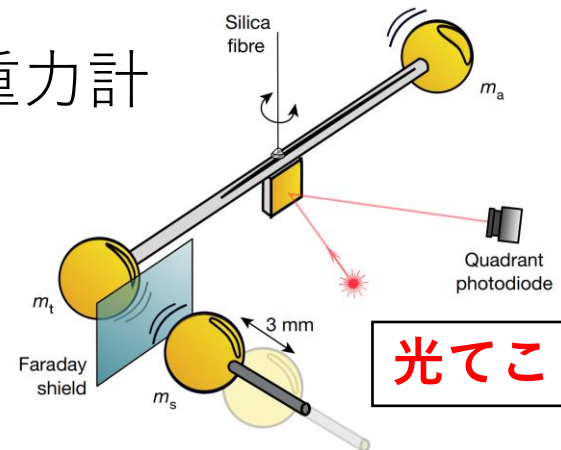
重力勾配計



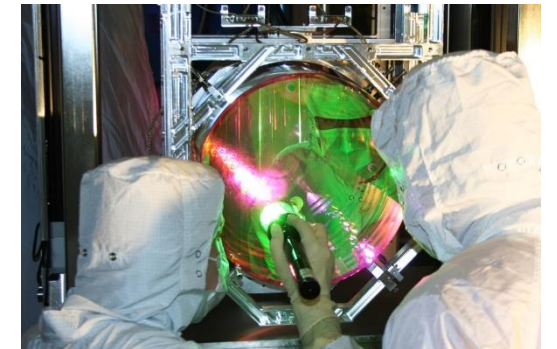
原子間力顕微鏡



重力計



重力波望遠鏡



マイケルソン干渉計

測定器

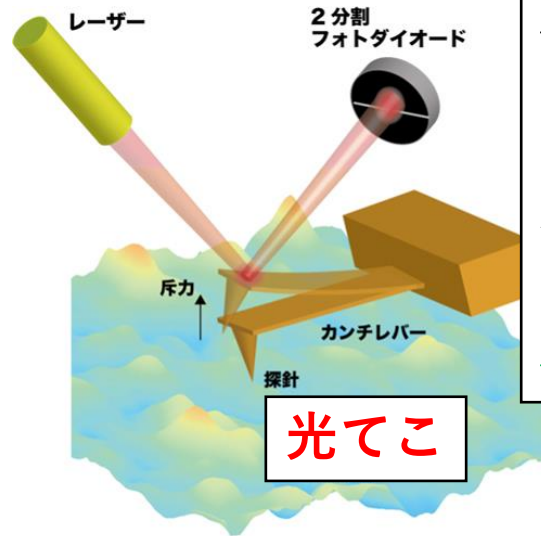
慣性センサー



静電型トランスデューサー



原子間力顕微鏡



いずれも線形かつ連続的な計測

$$y(t) = Ax(t) + \zeta(t)$$

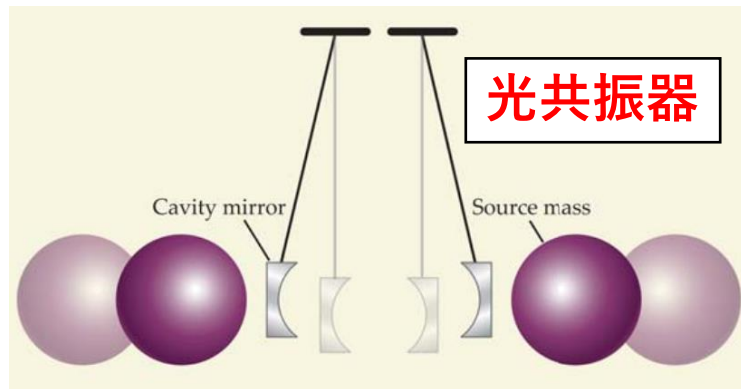
A : 感度係数

ζ : (信号読み取りの) 雑音

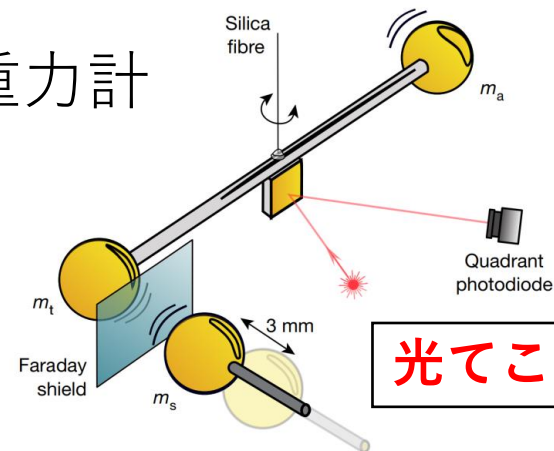
y : 出力

A が大きく、 ζ が小さいと嬉しい

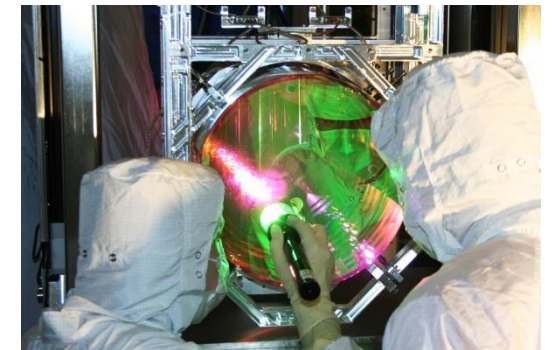
重力勾配計



重力計



重力波望遠鏡



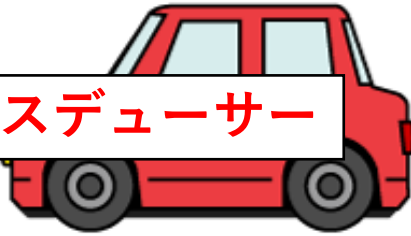
マイケルソン干渉計

測定器

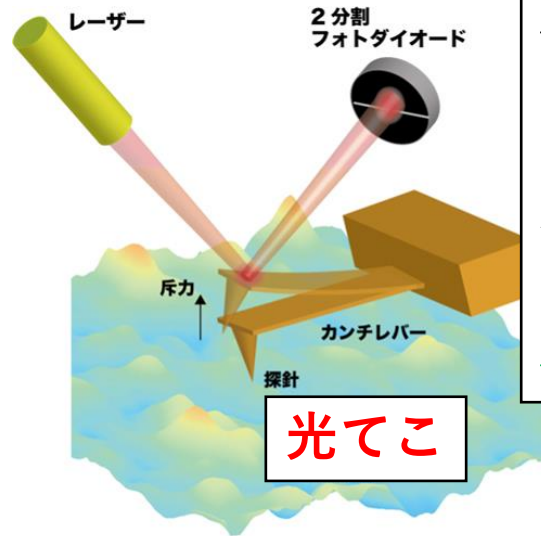
慣性センサー



静電型トランスデューサー



原子間力顕微鏡



いずれも線形かつ連続的な計測

$$y(t) = Ax(t) + \zeta(t)$$

A : 感度係数

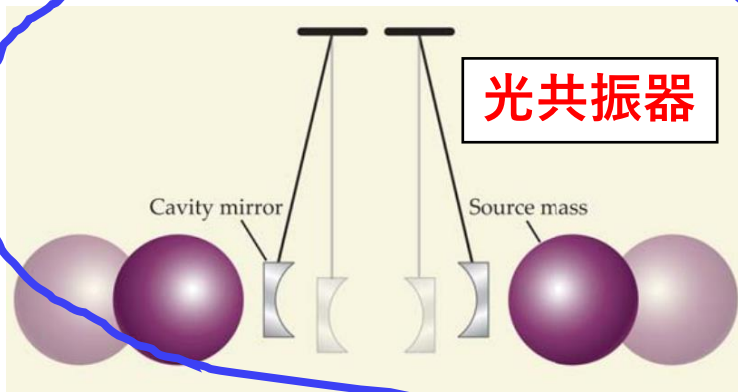
ζ : (信号読み取りの) 雑音

y : 出力

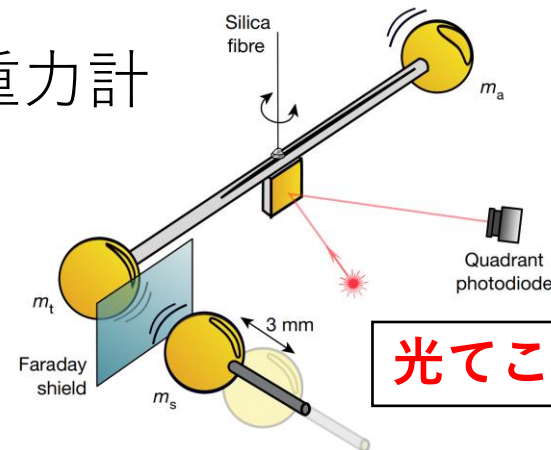
A が大きく、 ζ が小さいと嬉しい

➡ 干渉計や共振器を使った光計測

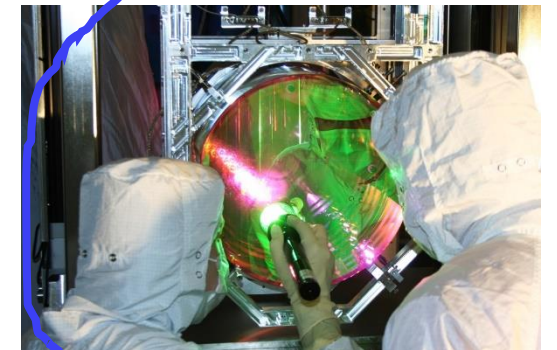
重力勾配計



重力計



重力波望遠鏡



マイケルソン干渉計

究極の性能

- 十分に低散逸な振動子・高い感度係数・小さな読み取り誤差を実現すれば、どこまで空間分解能が高められるか？

究極の性能

- 十分に低散逸な振動子・高い感度係数・小さな読み取り誤差を実現すれば、どこまで空間分解能が高められるか？

- **究極の空間分解能** → 振動子の量子揺らぎ： $x_{\text{zpf}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}$

今日の話：光計測で↑の空間分解能を実現するにはどうすればよいか？

究極の性能

- 十分に低散逸な振動子・高い感度係数・小さな読み取り誤差を実現すれば、どこまで空間分解能が高められるか？

- **究極の空間分解能** → 振動子の量子揺らぎ： $x_{\text{zpf}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}$

今日の話：光計測で↑の空間分解能を実現するにはどうすればよいか？

話の流れ：応用例 → 量子計測の条件 → フィードバック冷却と量子推定

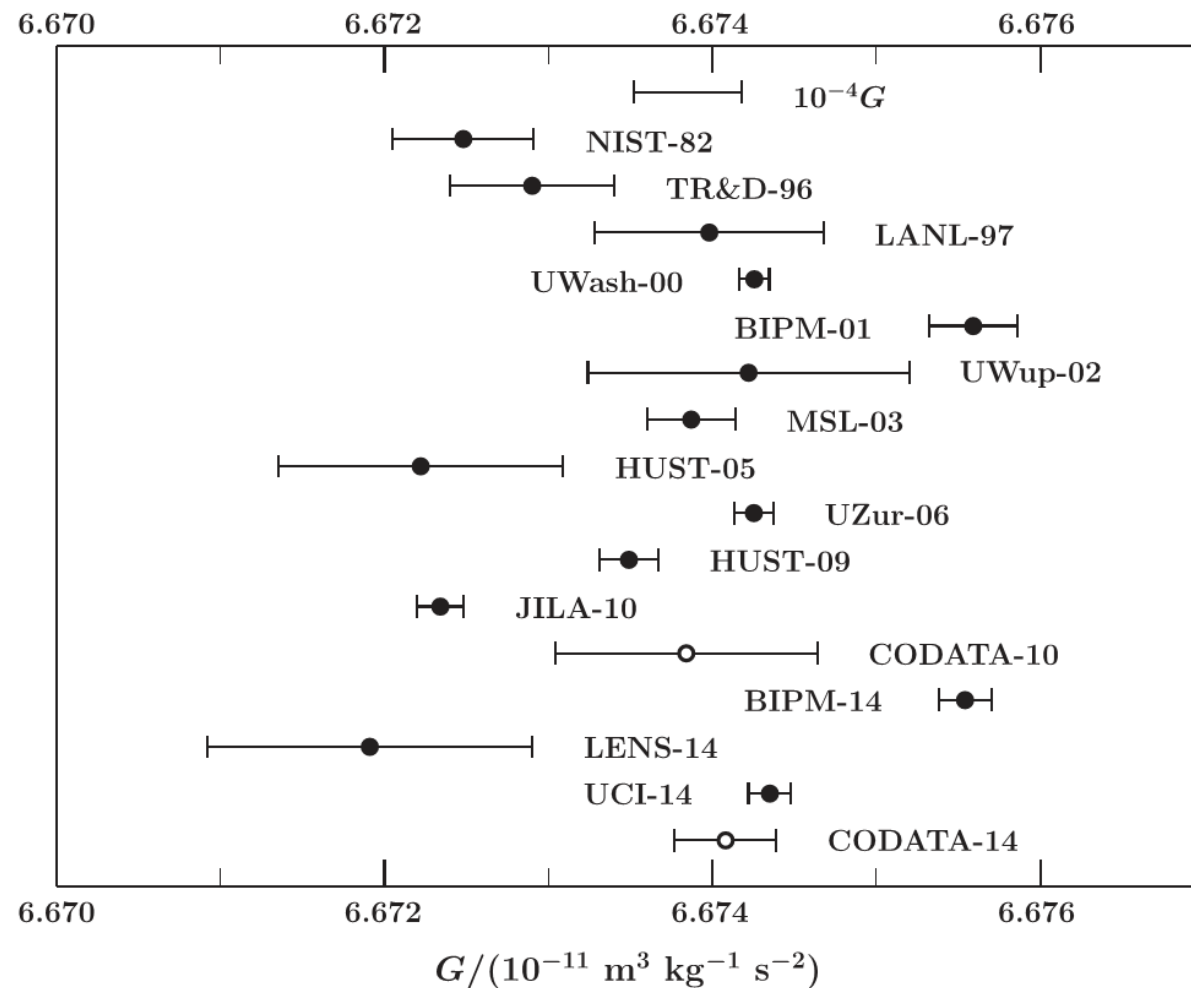
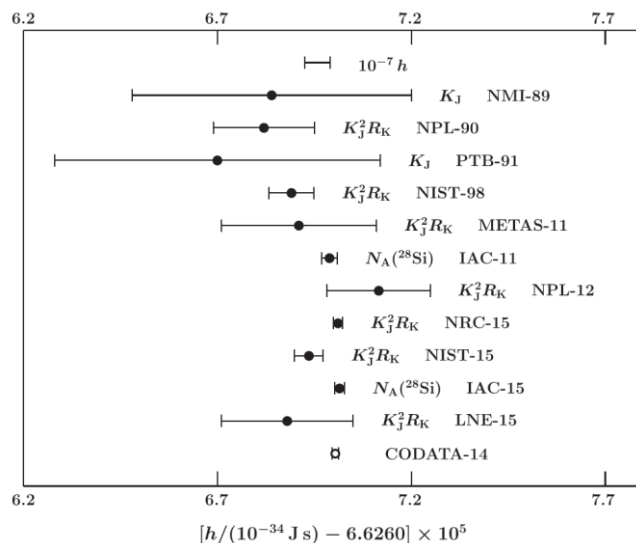
応用例 (1/4)

↓ プランク定数の測定

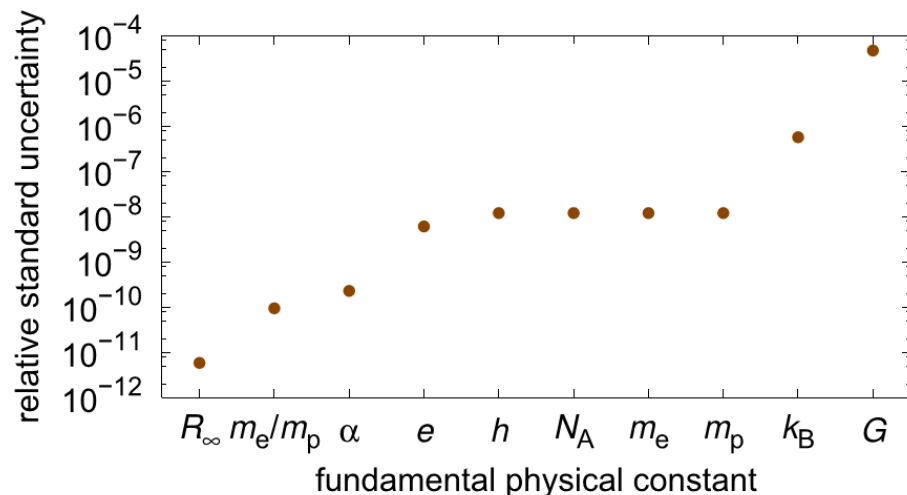
• 重力定数

多くの測定結果が
誤差の範囲内で
一致していない

→ これまでと異なる測定手法

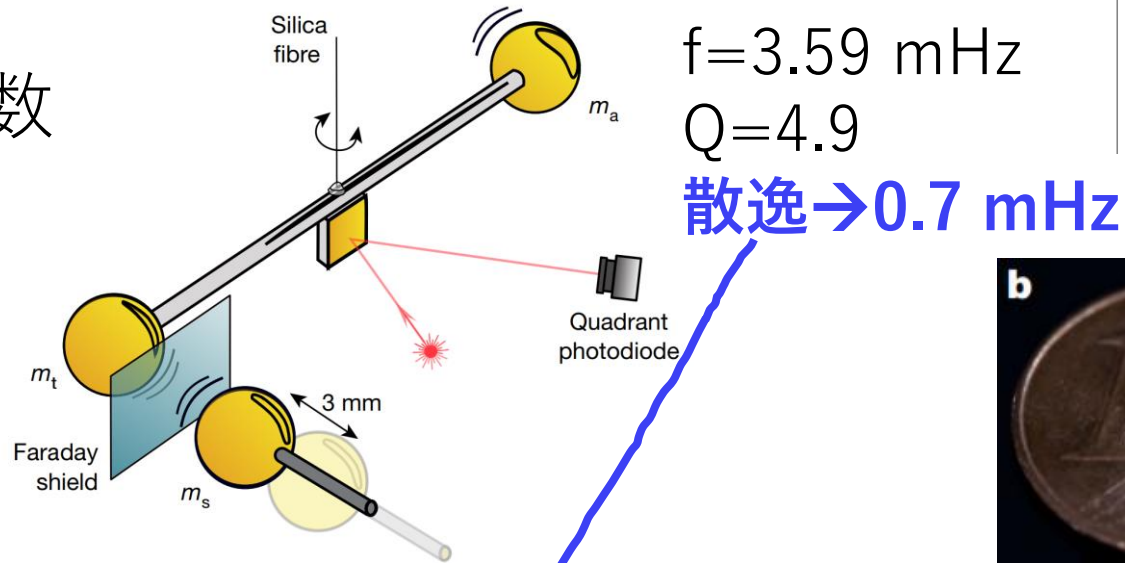


↑ 重力定数の測定



応用例 (1/4)

• 重力定数



$f = 3.59$ mHz

$Q = 4.9$

散逸 $\rightarrow 0.7$ mHz

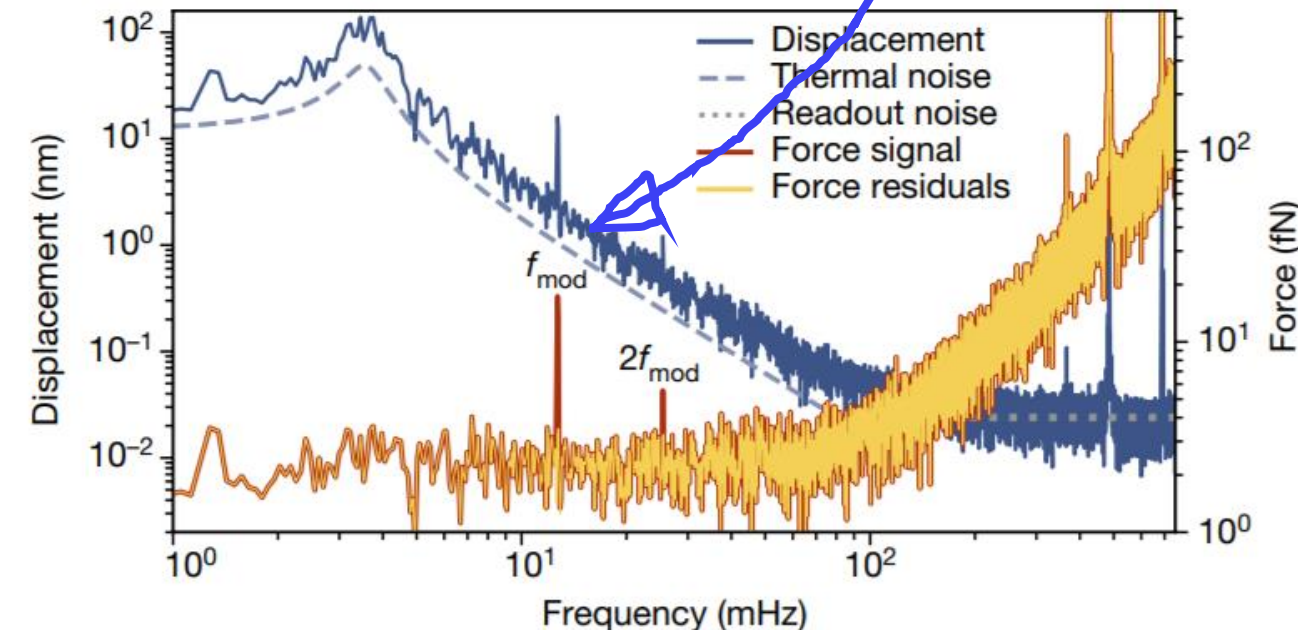
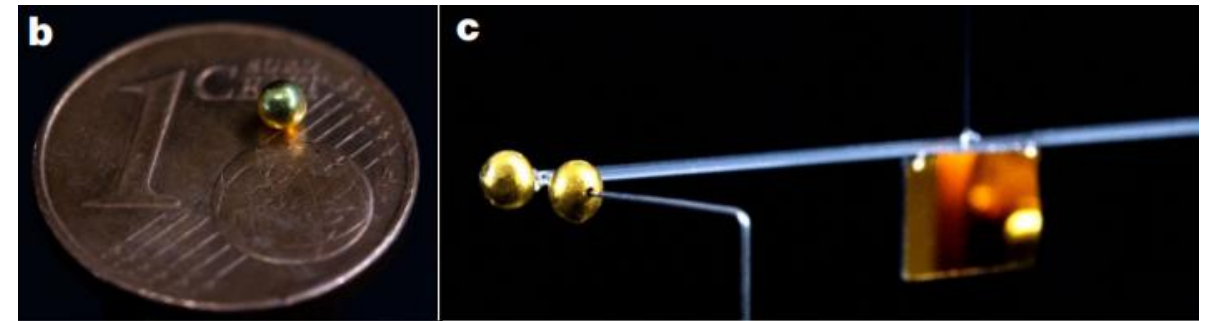
[Nature](#) volume 591, pages 225–228 (2021)

Article

Measurement of gravitational coupling between millimetre-sized masses

<https://doi.org/10.1038/s41586-021-03250-7>

Tobias Westphal^{1,2,3}, Hans Hepach^{1,4}, Jeremias Pfaff^{2,4} & Markus Aspelmeyer^{1,2,3,5}

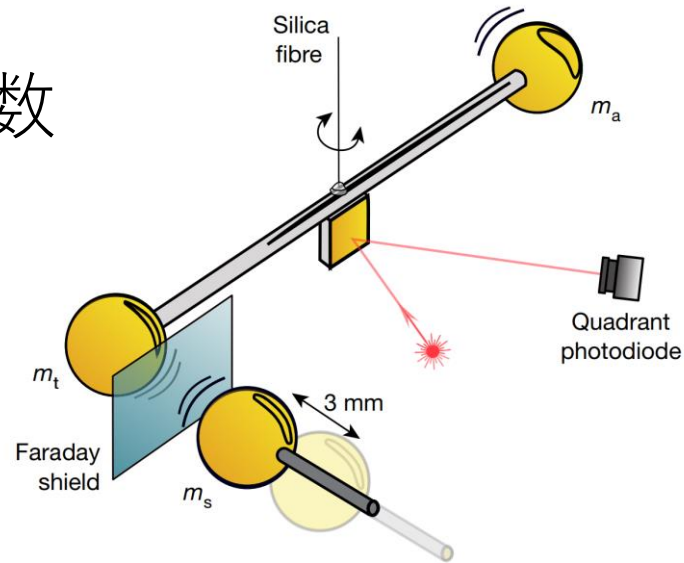


小さなソースマス (\sim mg) の重力を測る
 \rightarrow 系統誤差減らすことが可能だろう

先行研究
低散逸振動子
光てこ

応用例 (1/4)

• 重力定数



$f = 3.59 \text{ mHz}$

$Q = 4.9$

散逸 $\rightarrow 0.7 \text{ mHz}$

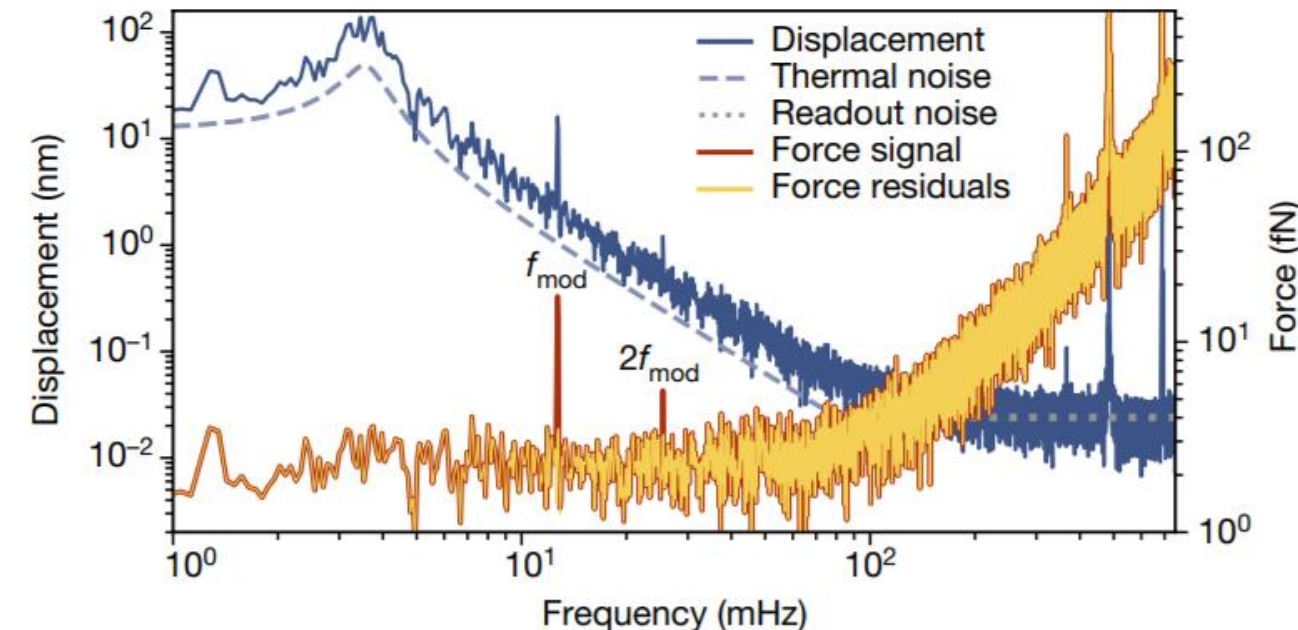
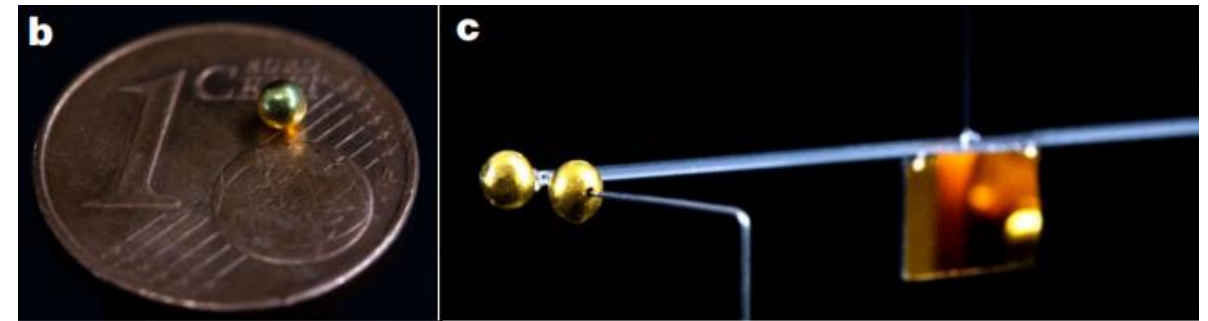
[Nature](#) volume 591, pages 225–228 (2021)

Article

Measurement of gravitational coupling between millimetre-sized masses

<https://doi.org/10.1038/s41586-021-03250-7>

Tobias Westphal^{1,2,3}, Hans Hepach^{1,4}, Jeremias Pfaff^{2,4} & Markus Aspelmeyer^{1,2,3,5}



小さなソースマス (~mg) の重力を測る
 \rightarrow 系統誤差減らすことが可能だろう

先行研究
低散逸振動子
光てこ

本研究
 \rightarrow さらに低散逸化 (uHz!)
 \rightarrow 光共振器

応用例 (2/4)

- 重力子の間接測定
- 重力の制動放射によるデコヒーレンス

分子の存在をブラウン運動から
間接測定したのと同様

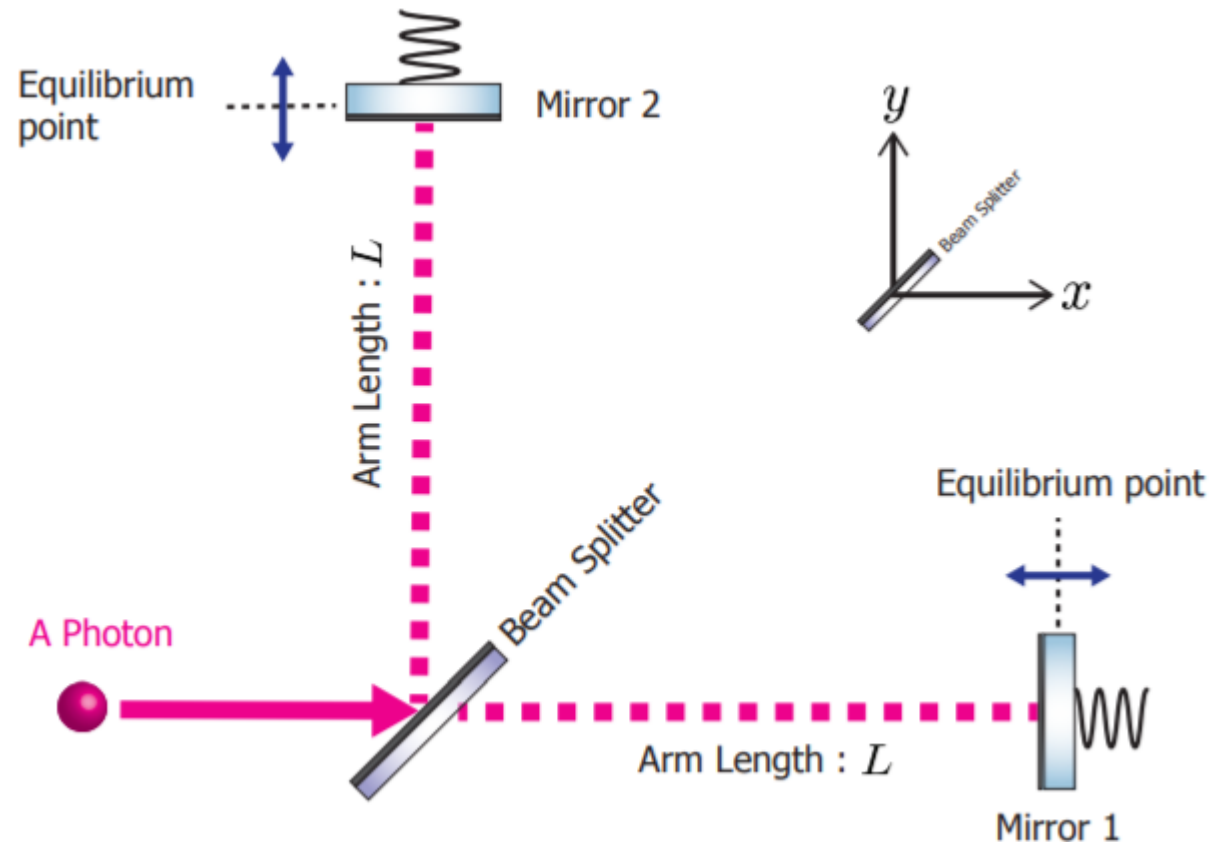
例) 40 kg, 40 km, 1 kHzのとき
20秒でdecohere
 $\propto (\text{物体の質量} / \text{プランク質量})^2$

Indirect detection of gravitons through quantum entanglement

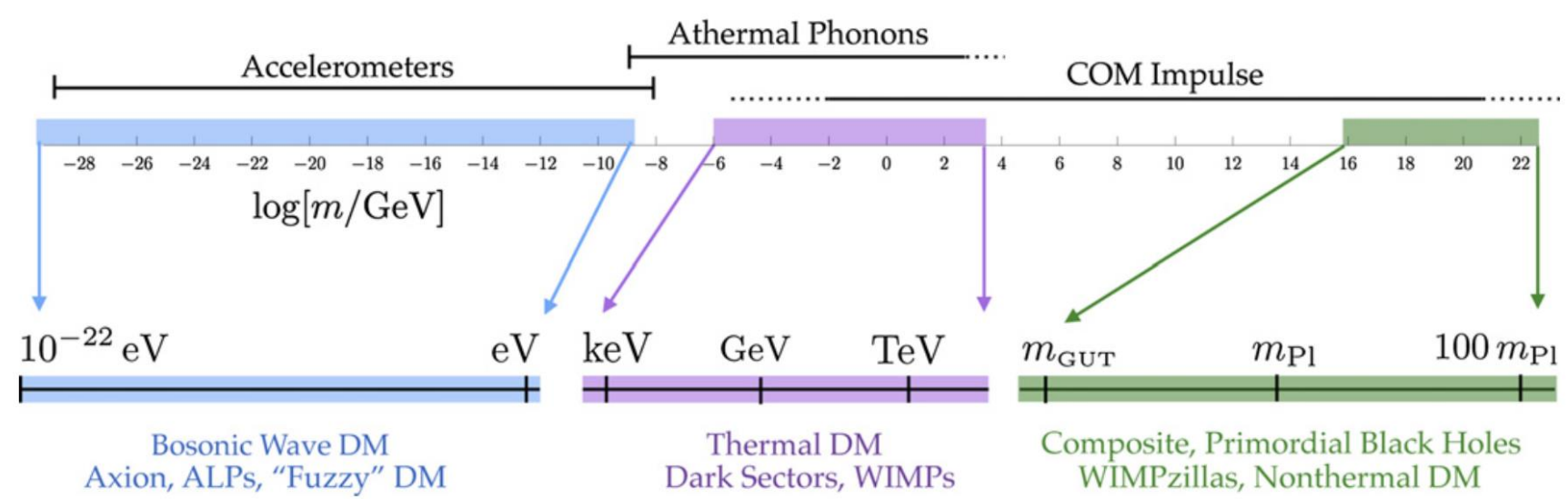
Sugumi Kanno,¹ Jiro Soda,² and Junsei Tokuda²

¹Department of Physics, Kyushu University, 744 Motoooka, Nishi-ku, Fukuoka 819-0395, Japan

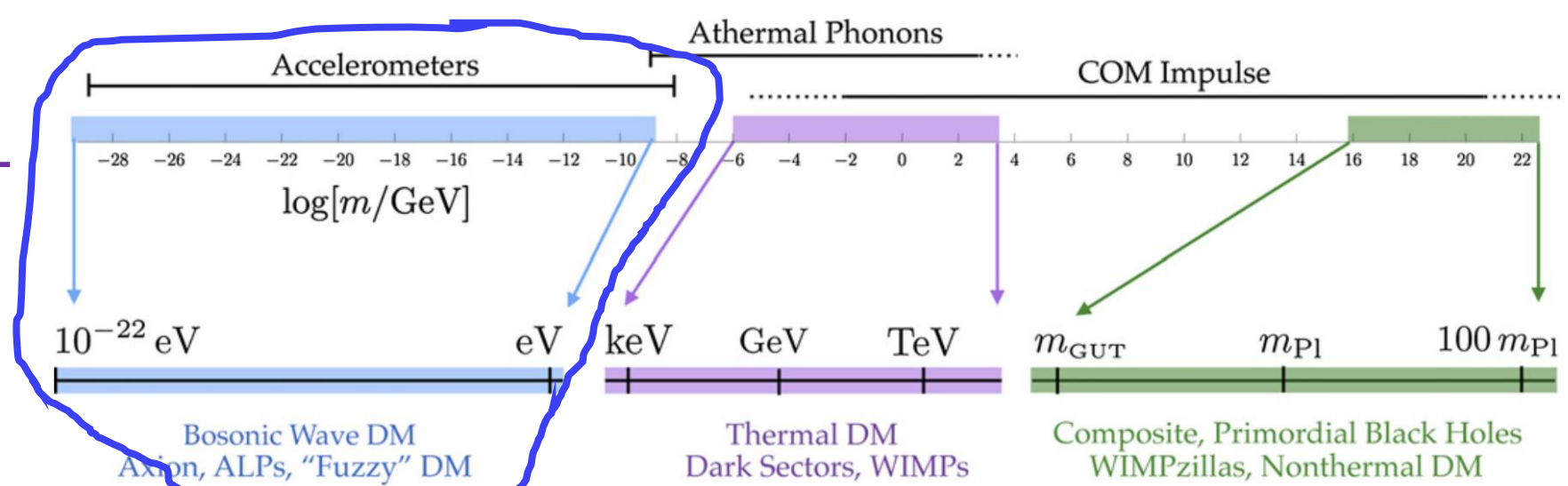
²Department of Physics, Kobe University, Kobe 657-8501, Japan



応用例 (3/4)



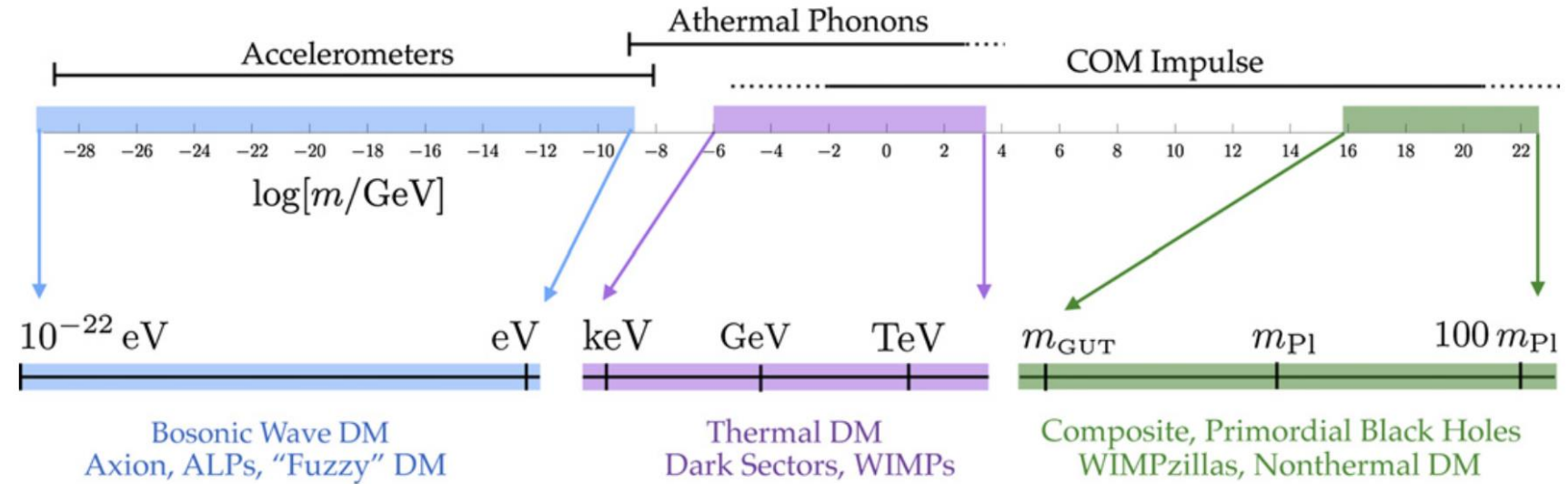
応用例 (3/4)



- 軽いダークマター

→ 古典的な波長の長い波 (10^{-12} eV で 1500 km, 200 Hz くらい)

応用例 (3/4)



- 軽いダークマター

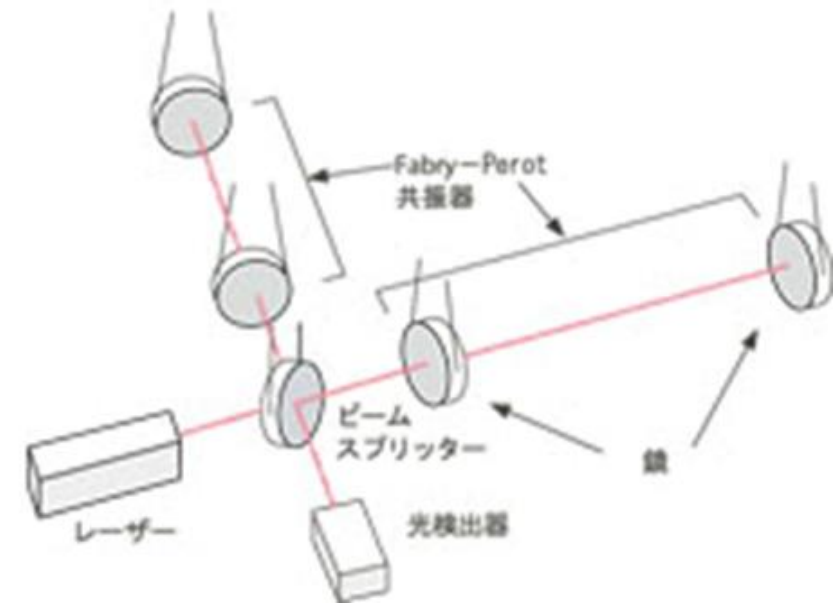
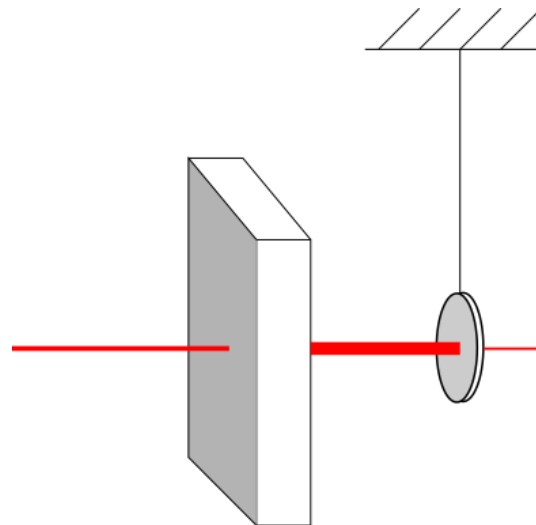
→古典的な波長の長い波 (10^{-12} eVで1500 km, 200 Hzくらい)

- 未知の力 (“第五の力”) を媒介するゲージボソンかも
例) B-L (バリオン数-レプトン数)

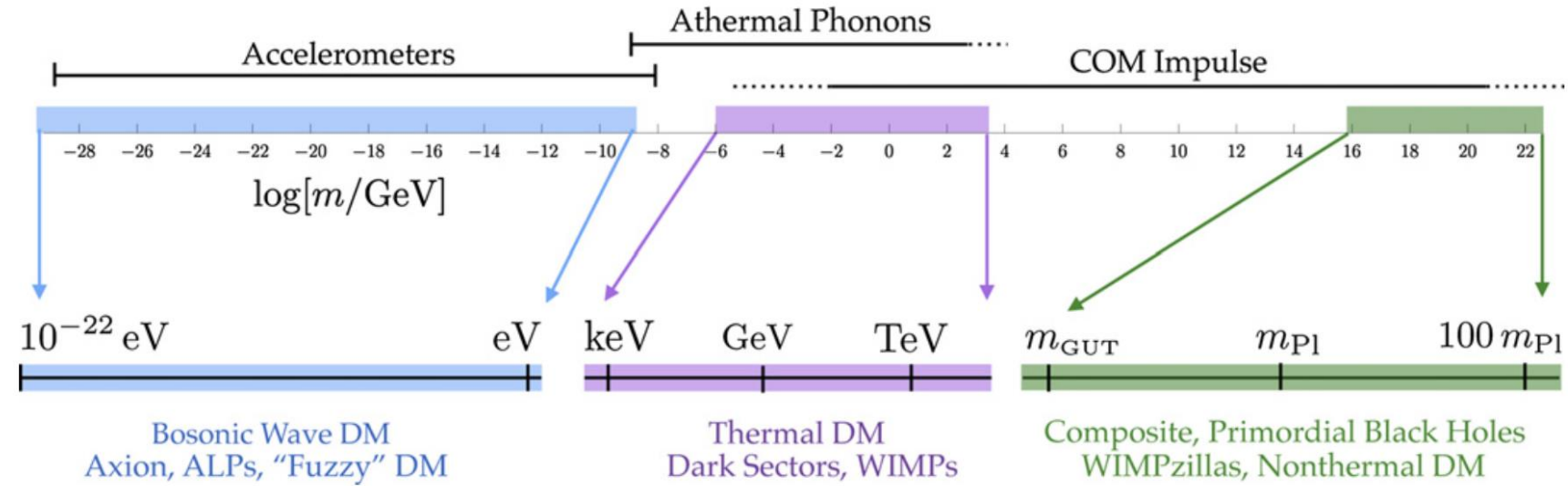
に結合するゲージ場かも

- B-Lは標準理論では保存量
- 大体、物体の中性子数に一致

→材質に依存する周期的な力



応用例 (3/4)



- 軽いダークマター

→古典的な波長の長い波 ($1\text{e-}12 \text{ eV}$ で1500 km, 200 Hzくらい)

- 未知の力 (“第五の力”) を媒介するゲージボソンかも

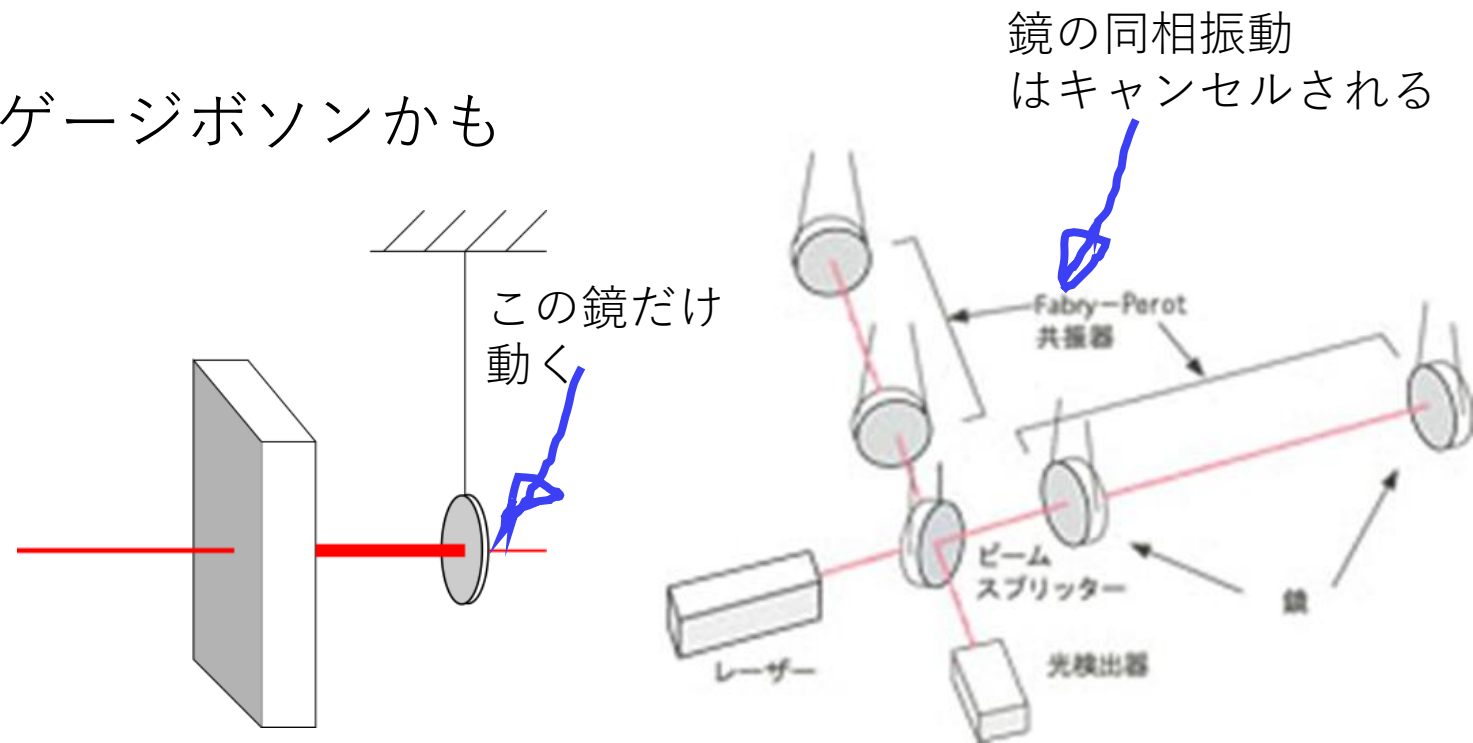
例) B-L (バリオン数-レプトン数)

に結合するゲージ場かも

- B-Lは標準理論では保存量

- 大体、物体の中性子数に一致

→材質に依存する周期的な力



応用例 (3/4)

200 Hz

鏡に加わる力：

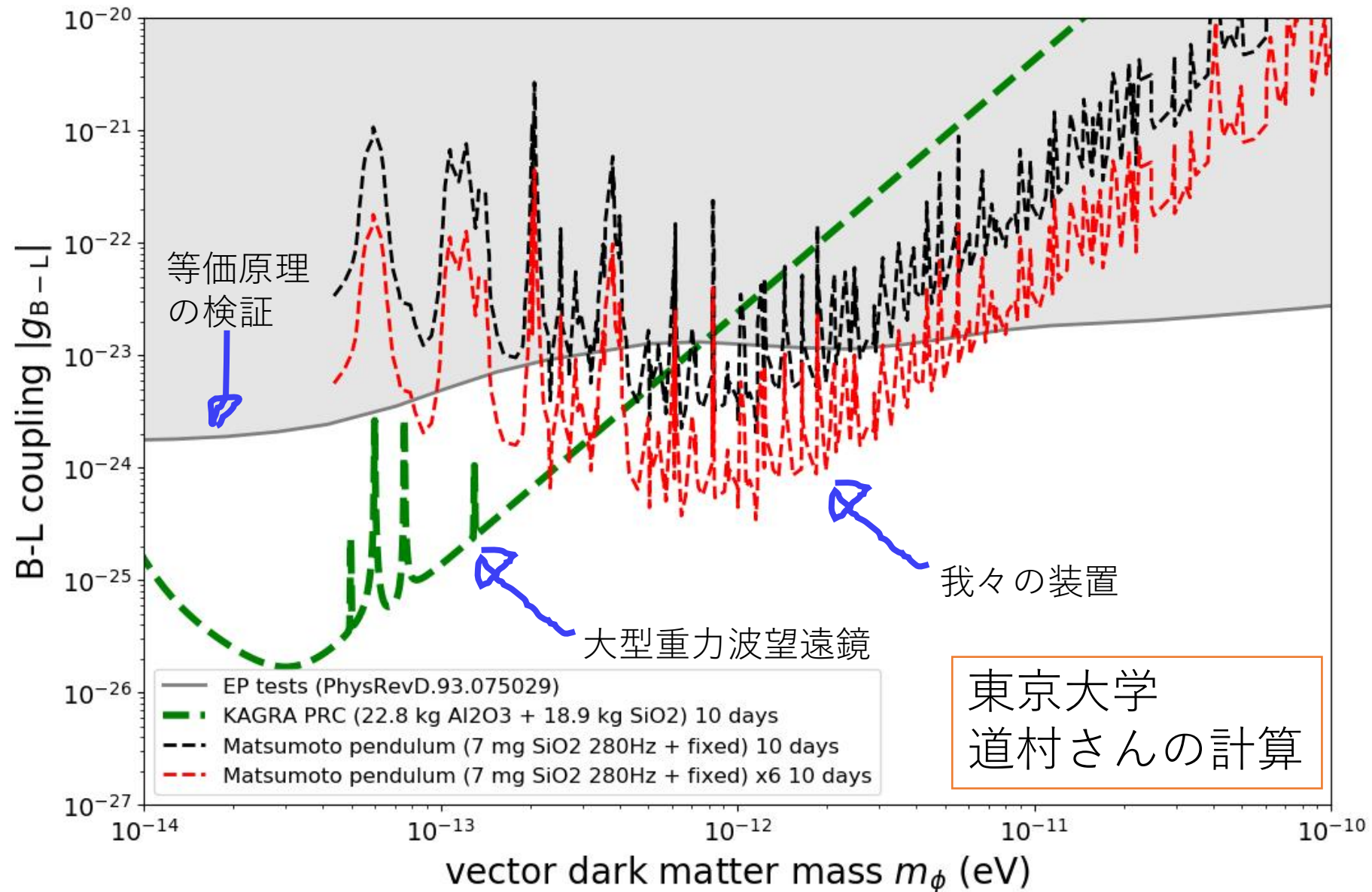
$$g_{B-L}\sqrt{\rho_{DM}}N_n\cos(\omega t)$$

g_{B-L} ：結合定数

ρ_{DM} ：ダークマターの
密度

N_n ：中性子数

ω ：ダークマターの
質量に対応



応用例 (4/4)

- 相対論的重力

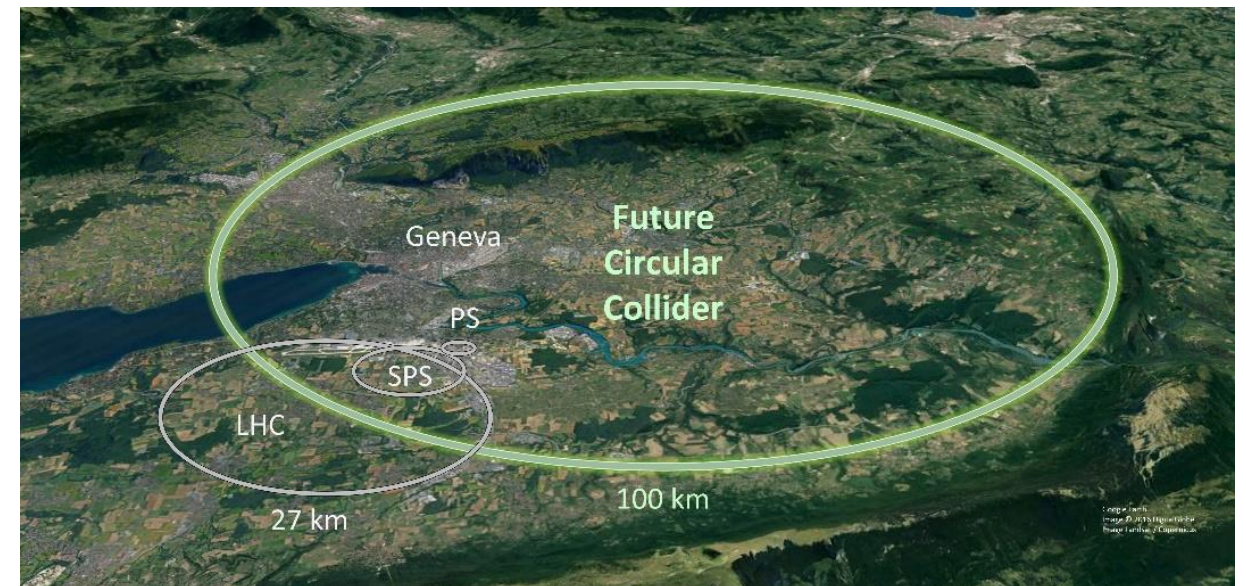
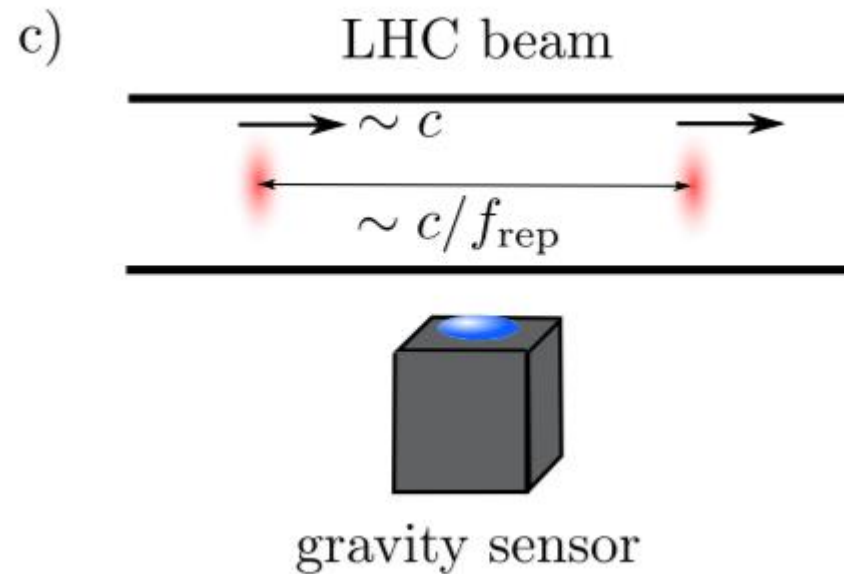
arXiv.org > gr-qc > arXiv:2104.09209

General Relativity and Quantum Cosmology

[Submitted on 19 Apr 2021 (v1), last revised 27 Apr 2021 (this version, v2)]

Perspectives of measuring gravitational effects of laser light and particle beams

Felix Spengler, Dennis Rätzel, Daniel Braun



目次

量子計測の条件

- 古典力学と量子力学
- 線形計測・ショットノイズ
- 量子計測の条件：測定率と熱的デコヒーレンス

低散逸振動子の開発

- 振りの散逸（structural, viscous, 重力希薄化）
- 光ばねによる散逸の希薄化
- 量子計測の条件を満たした振動子

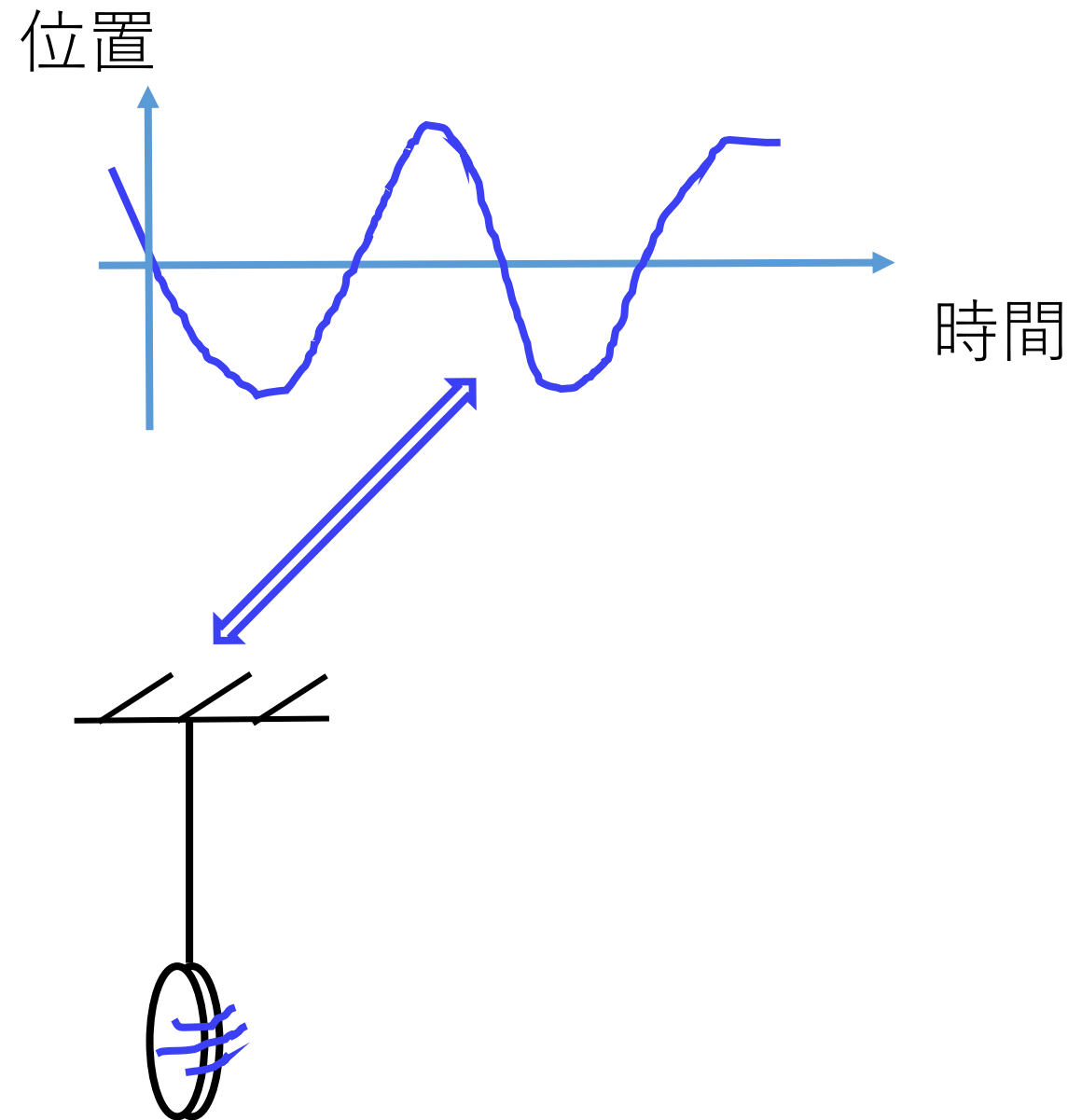
量子制御と推定

- フィードバック冷却（420 μK ）
- 量子推定によるスクイーズ状態の生成（純度 ~ 0.001 ）

- まとめ

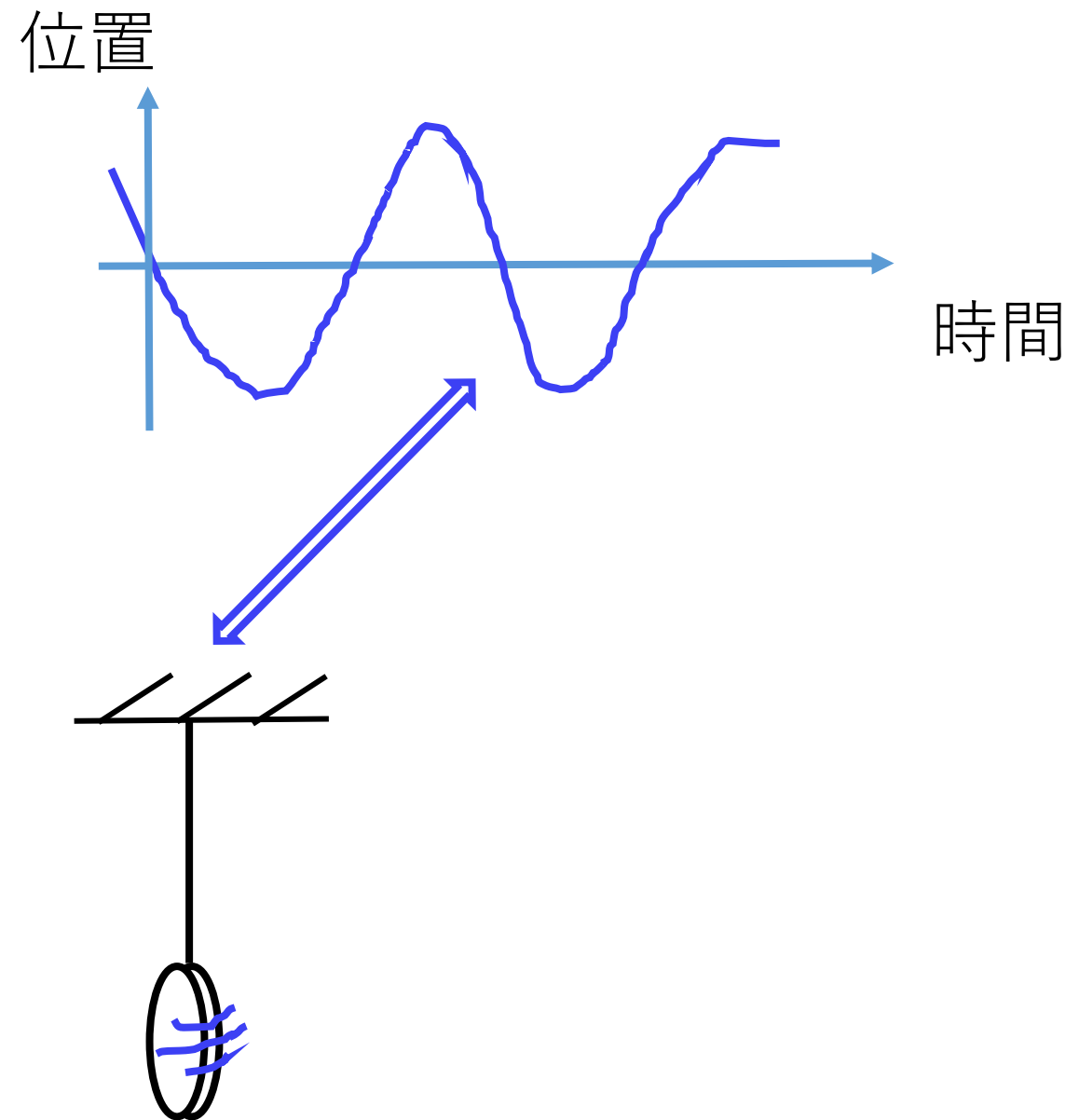
古典力学

- 古典力学



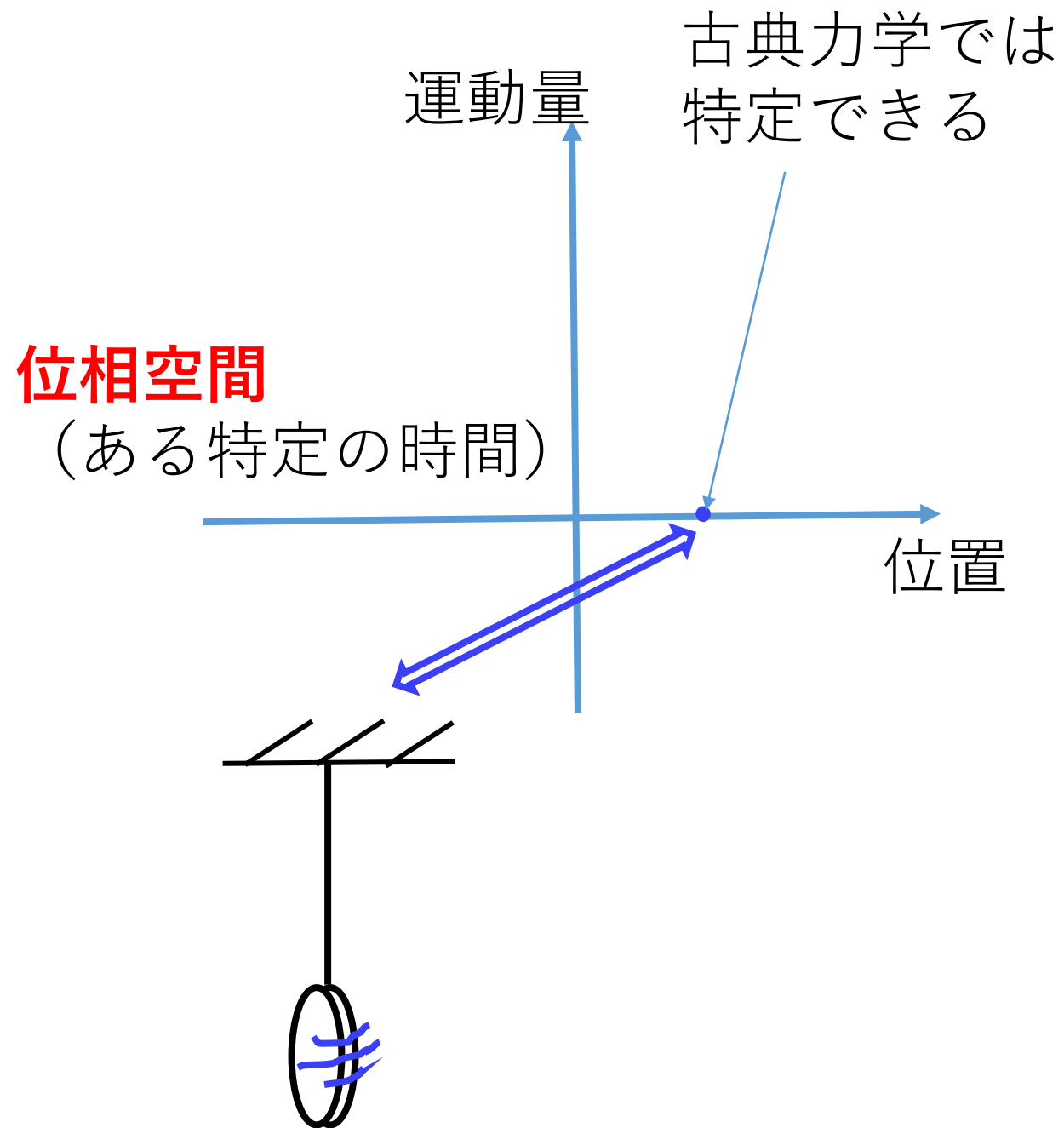
古典力学

- 古典力学
- 決定論**



古典力学

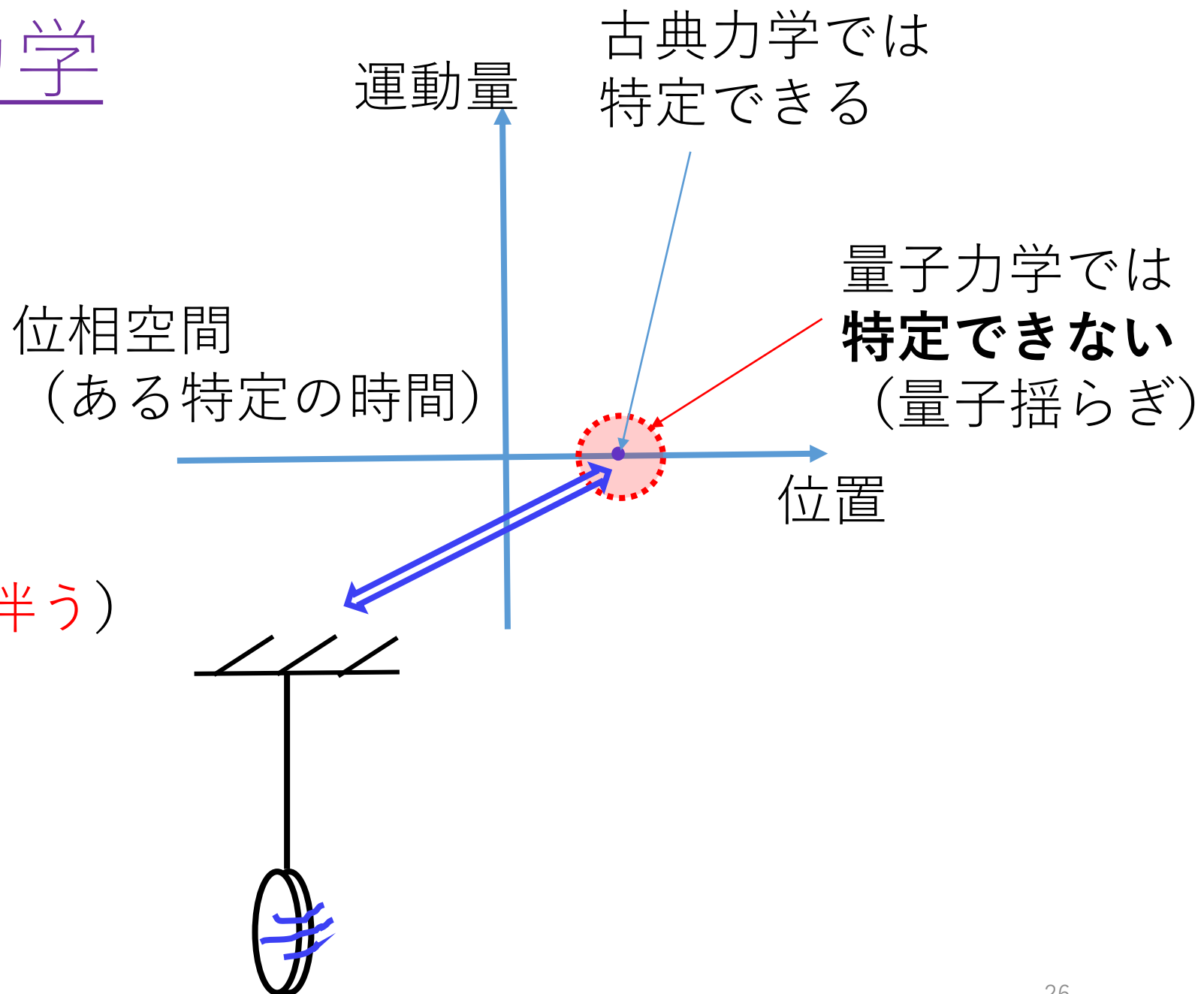
- 古典力学
決定論



古典力学と量子力学

- 古典力学
決定論

- 量子力学
確率的（**本質的に**揺らぎが伴う）



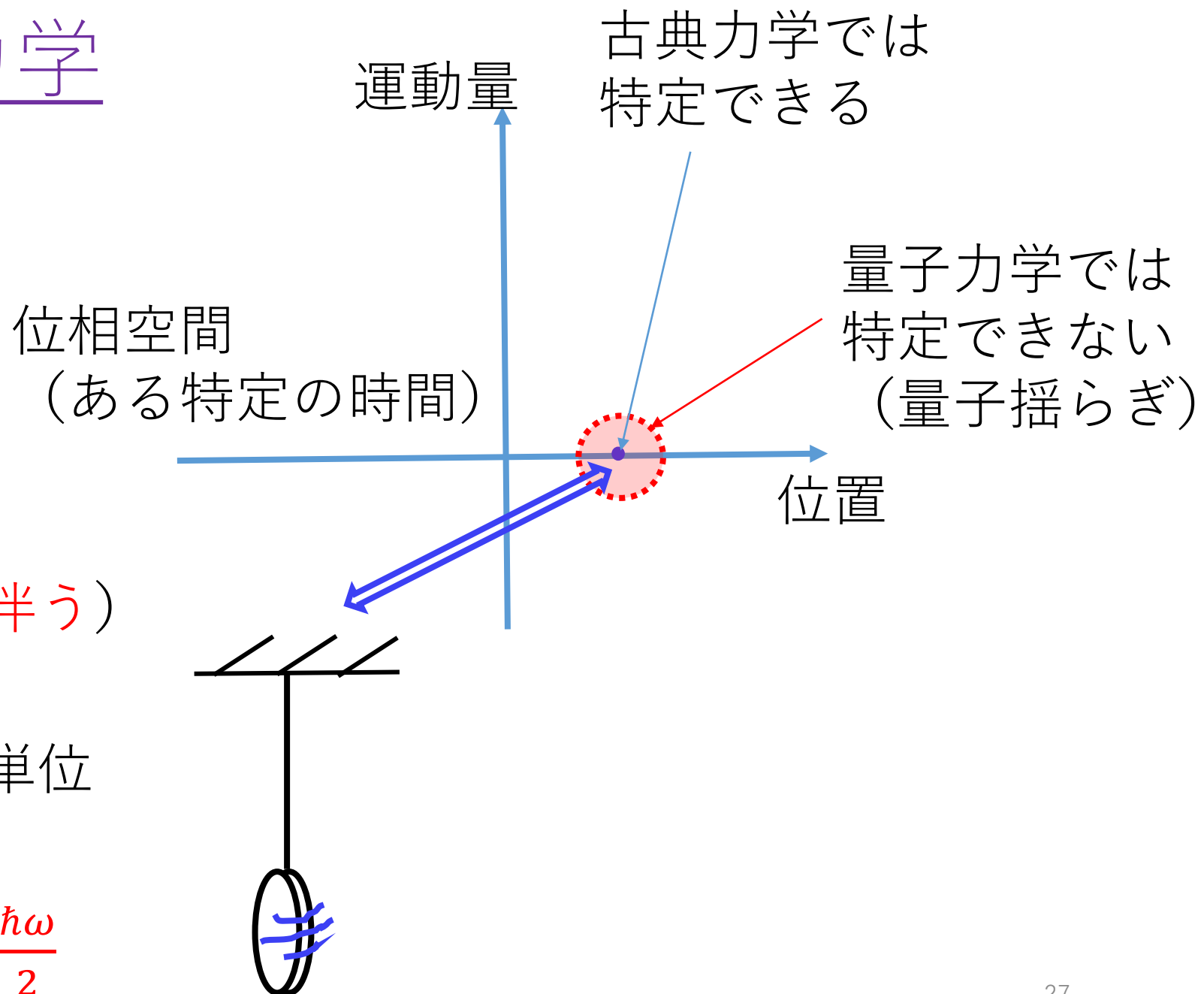
古典力学と量子力学

- 古典力学
決定論

- 量子力学
確率的（本質的に揺らぎが伴う）

振動子のエネルギーの最小単位
（**フォノン**）： $\hbar\omega$

量子揺らぎのエネルギー： $\frac{\hbar\omega}{2}$



古典力学と量子力学の違い

- 量子力学の舞台

ヒルベルト空間という抽象的（数学的）な複素空間

物理量は演算子 $[\hat{x}, \hat{p}] = \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar$

古典力学と量子力学の違い

- 量子力学の舞台

ヒルベルト空間という抽象的（数学的）な複素空間

物理量は演算子 $[\hat{x}, \hat{p}] = \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar$

不確定性原理

- $\Delta x \Delta p \geq \frac{|\langle [\hat{x}, \hat{p}] \rangle|}{2} = \frac{\hbar}{2}$

古典力学と量子力学の違い

- 量子力学の舞台

ヒルベルト空間という抽象的（数学的）な複素空間

物理量は演算子 $[\hat{x}, \hat{p}] = \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar$

不確定性原理

- $\Delta x \Delta p \geq \frac{|\langle [\hat{x}, \hat{p}] \rangle|}{2} = \frac{\hbar}{2}$

振動子の量子揺らぎ（零点振動）の大きさ

$$x_{zpf} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} = 3 \times 10^{-17} \frac{\text{m}}{\sqrt{\text{Hz}}} \left(\frac{7 \text{ mg}}{m} \right)^{0.5} \left(\frac{2\pi 1000 \text{ Hz}}{\omega} \right)^{0.5}$$

古典力学と量子力学の違い

- 量子力学の舞台

ヒルベルト空間という抽象的（数学的）な複素空間

物理量は演算子 $[\hat{x}, \hat{p}] = \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar$

不確定性原理

- $\Delta x \Delta p \geq \frac{|\langle [\hat{x}, \hat{p}] \rangle|}{2} = \frac{\hbar}{2}$

光計測でこの空間分解能は実現可能か？

振動子の量子揺らぎ（零点振動）の大きさ

$$x_{zpf} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} = 3 \times 10^{-17} \frac{\text{m}}{\sqrt{\text{Hz}}} \left(\frac{7 \text{ mg}}{m} \right)^{0.5} \left(\frac{2\pi 1000 \text{ Hz}}{\omega} \right)^{0.5}$$

線形計測（光量変化から位置を線形に測定）



線形変位計測

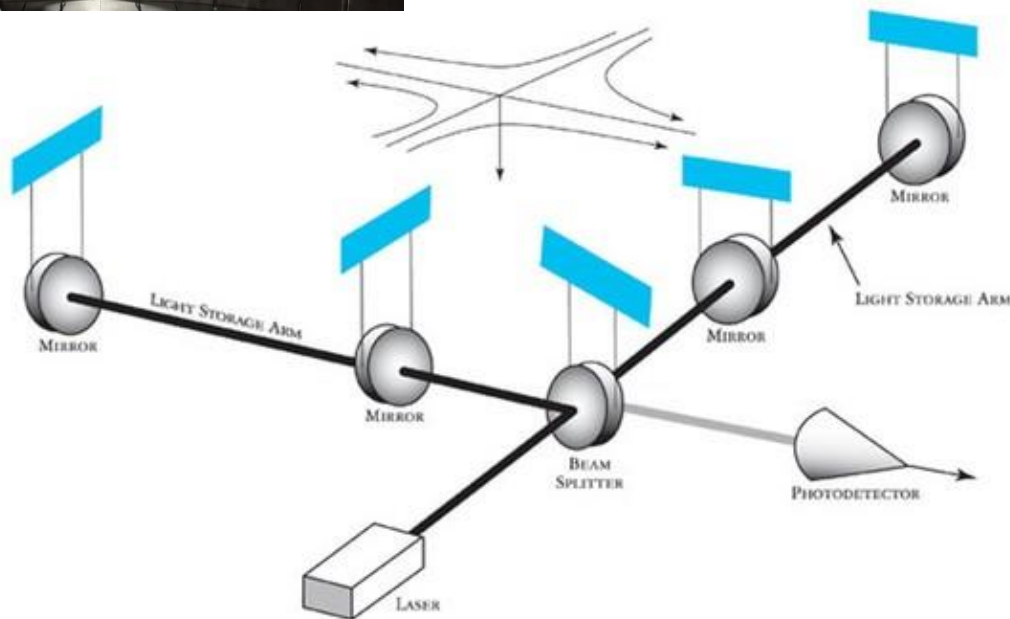
$$y = Ax + \zeta \leftarrow w$$

w

$\frac{w}{m}$

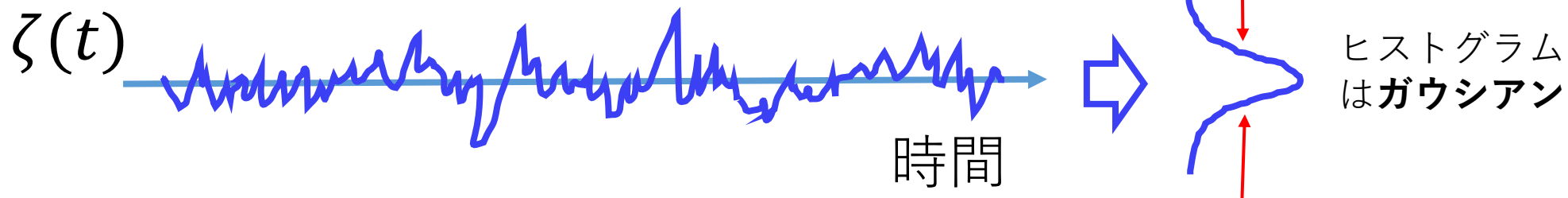
m

読み取り誤差（ショットノイズとか）



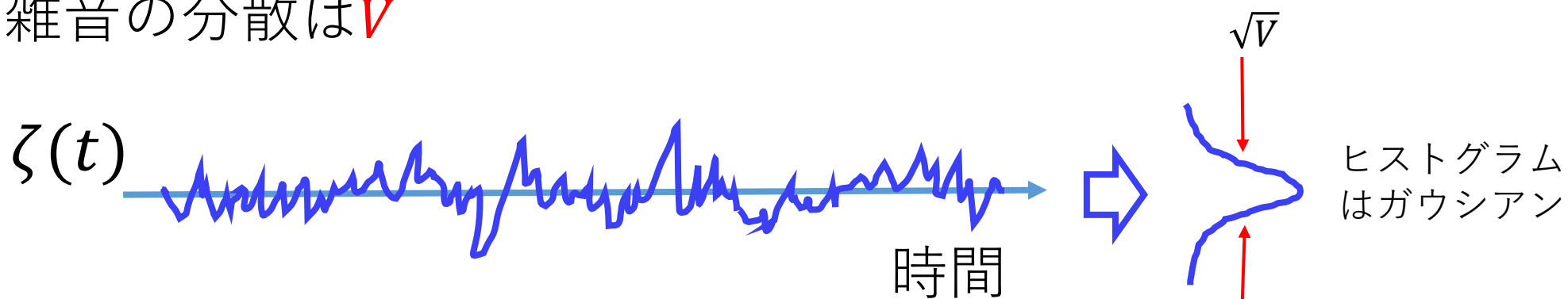
雑音 ζ の扱い方

- 雑音の分散は V



雑音 ζ の扱い方

- 雑音の分散は V



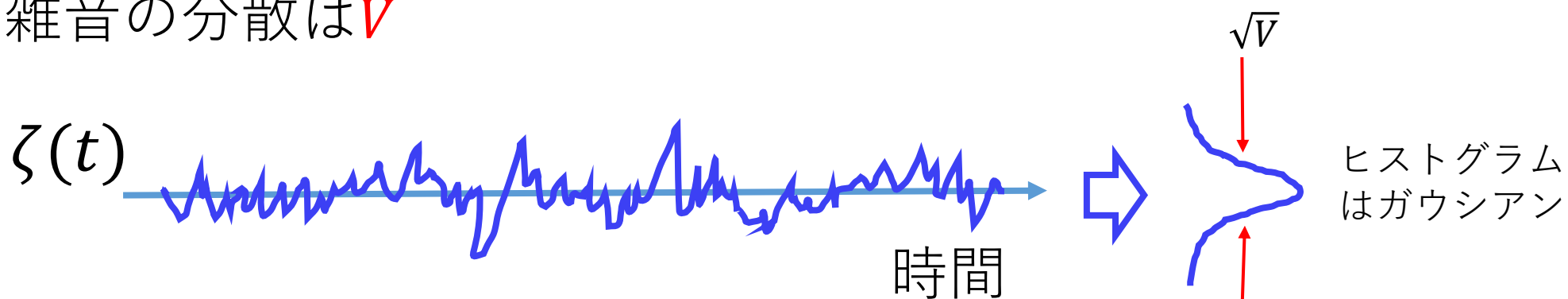
パワースペクトル
(自己相関をフーリエ変換)

$S_{\zeta\zeta}(\omega)$

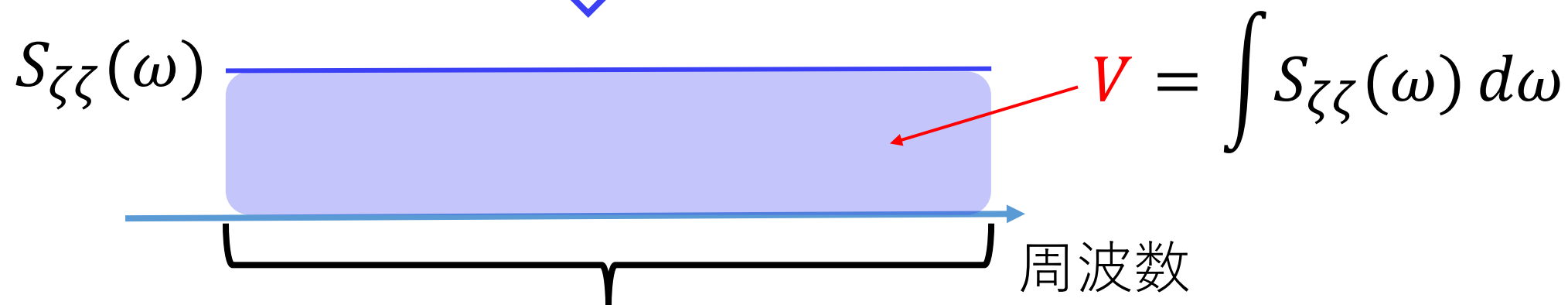
周波数

雑音 ζ の扱い方

- 雑音の分散は V



↓
パワースペクトル
(自己相関をフーリエ変換)



線形計測の空間分解能



線形変位計測

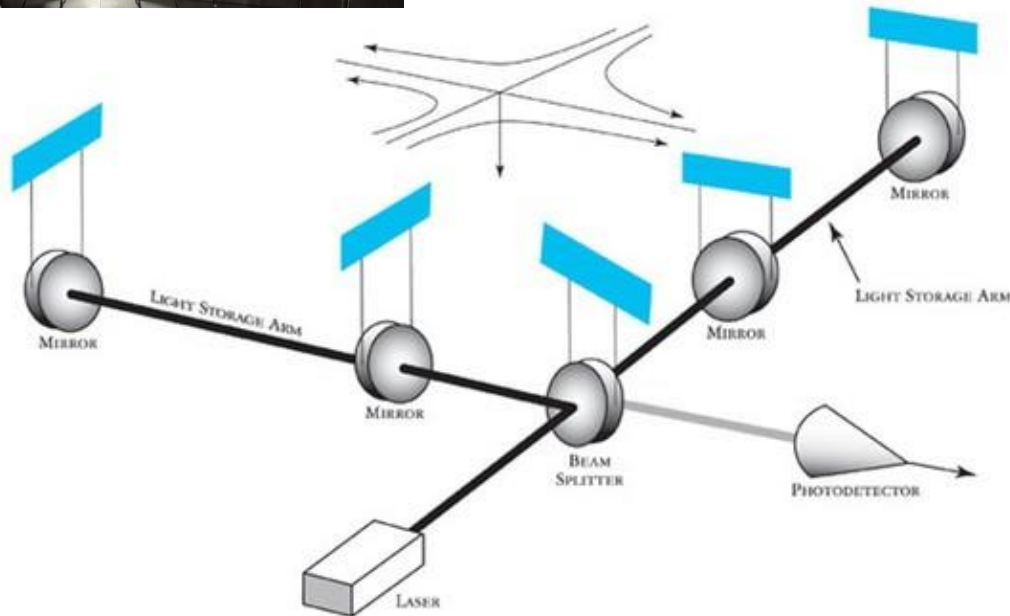
$$\bullet y = Ax + \zeta \leftarrow w$$

w

$\frac{w}{m}$

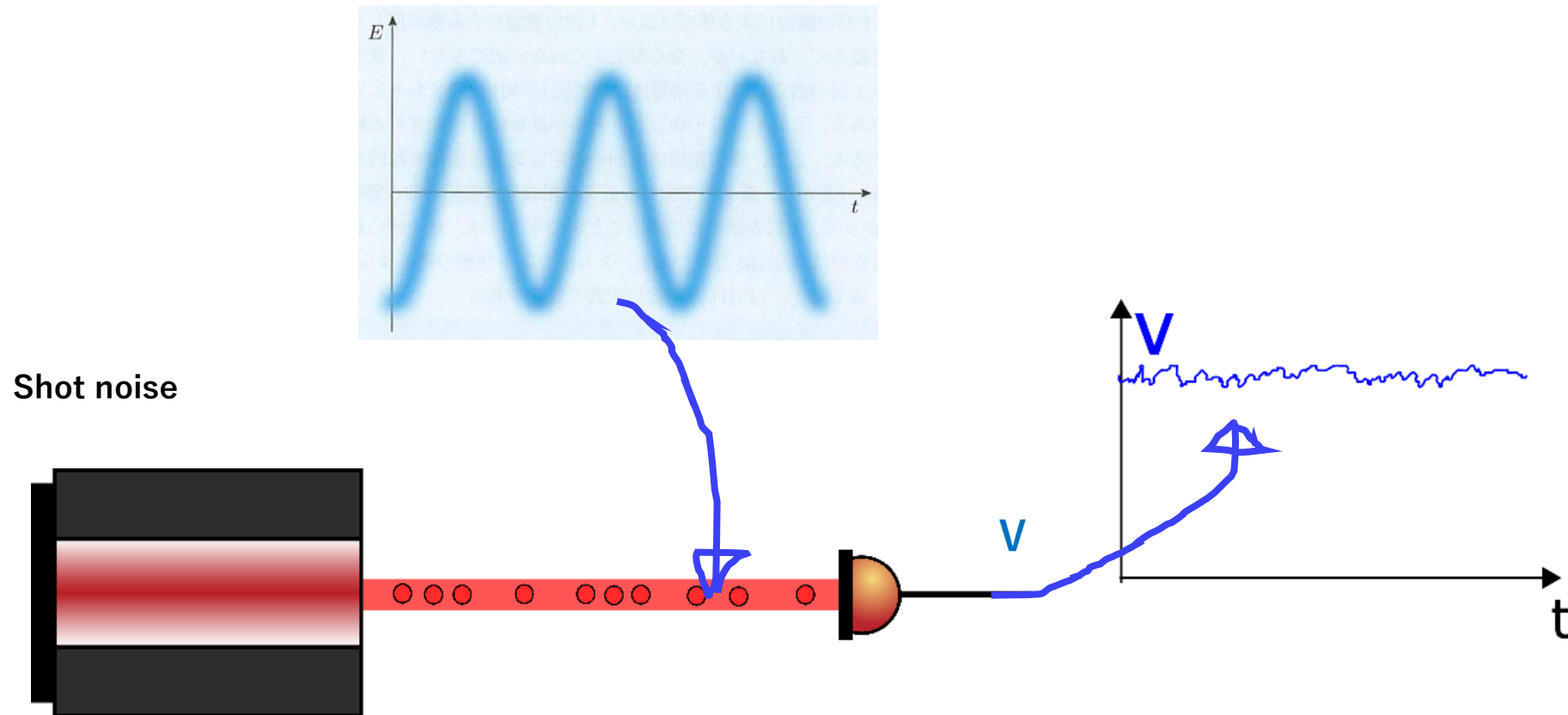
m

読み取り誤差 (ショットノイズとか)



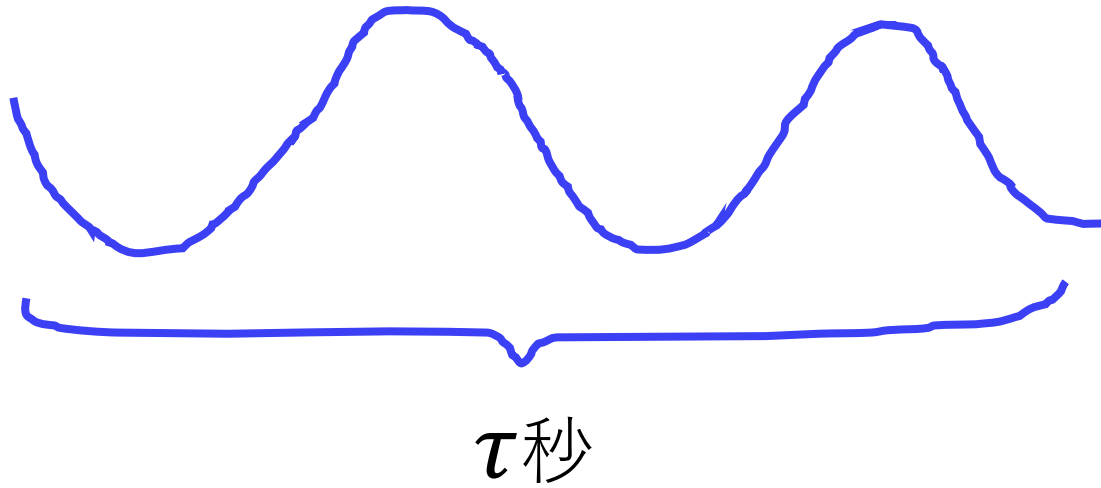
ショットノイズの復習

- レーザー光に含まれる光子の数はポアソン分布に従う
- **平均と分散が等しく**、時間的な相関はない（パワースペクトルは**定数**）



ショットノイズの復習

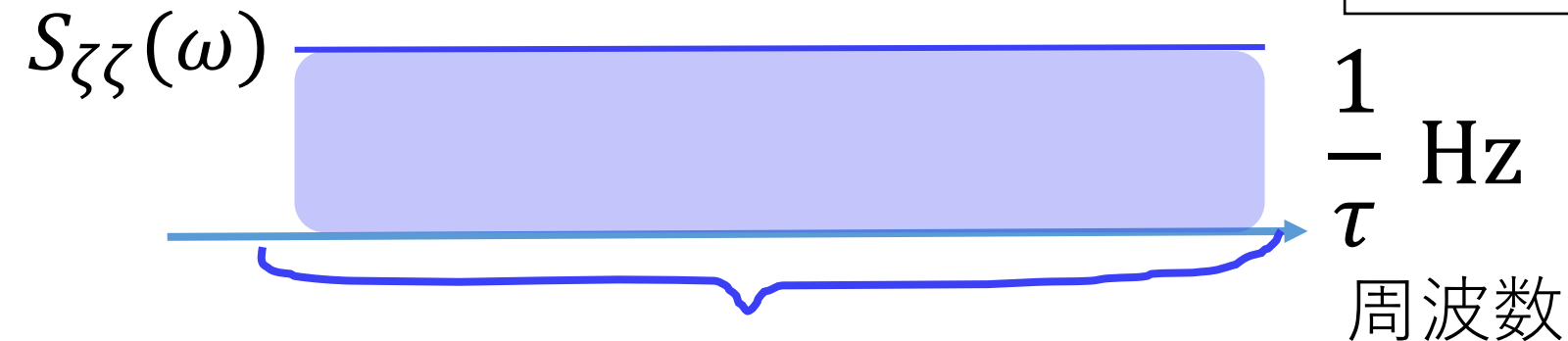
- レーザー光に含まれる光子の数はポアソン分布に従う
- **平均と分散が等しく**、時間的な相関はない（パワースペクトルは**定数**）



- 一秒に平均 \bar{n} 個の光子
(光のパワーは $\bar{P} [W] = \hbar\omega\bar{n}$)

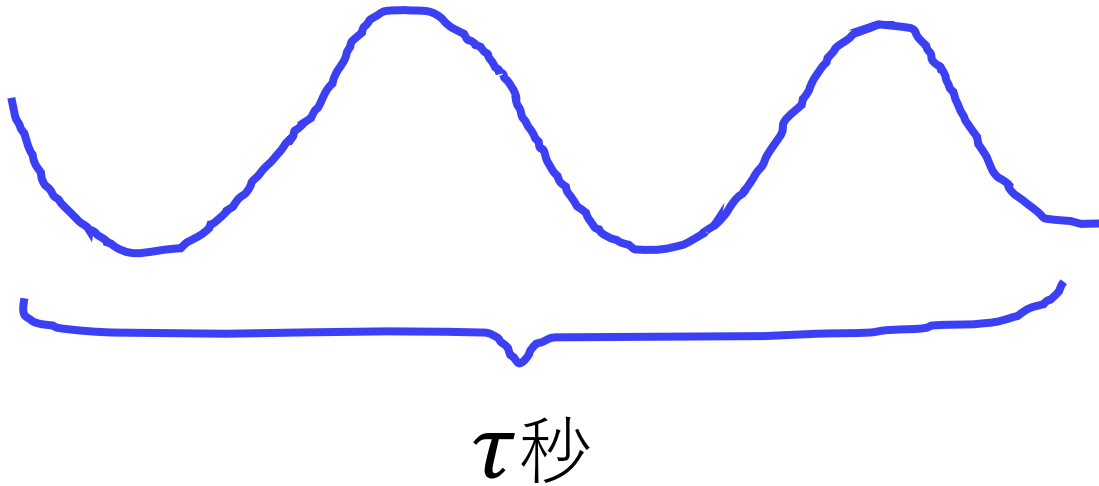
- パワースペクトルの積分が分散

$$\int S df = S \int df = S\Delta f = \langle P^2 \rangle$$



ショットノイズの復習

- レーザー光に含まれる光子の数はポアソン分布に従う
- **平均と分散が等しく**、時間的な相関はない（パワースペクトルは**定数**）



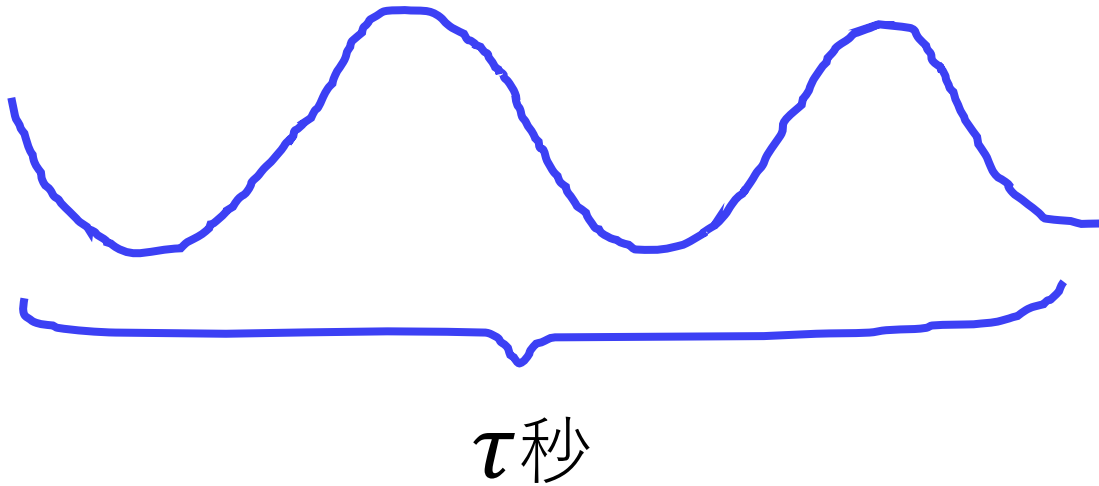
- 一秒に平均 \bar{n} 個の光子
(光のパワーは $\bar{P} [W] = \hbar\omega\bar{n}$)
- パワースペクトルの積分が分散

$$\int S df = S \int df = S\Delta f = \langle P^2 \rangle$$

- I. 平均光子数： $N = \bar{n}\tau = \frac{\bar{P}}{\hbar\omega}\tau$
- II. 光子数の標準偏差： $\sigma_N = \sqrt{\bar{n}\tau}$

ショットノイズの復習

- レーザー光に含まれる光子の数はポアソン分布に従う
- 平均と分散が等しく、時間的な相関はない（パワースペクトルは定数）



- 一秒に平均 \bar{n} 個の光子
(光のパワーは $\bar{P} [W] = \hbar\omega\bar{n}$)
- パワースペクトルの積分が分散

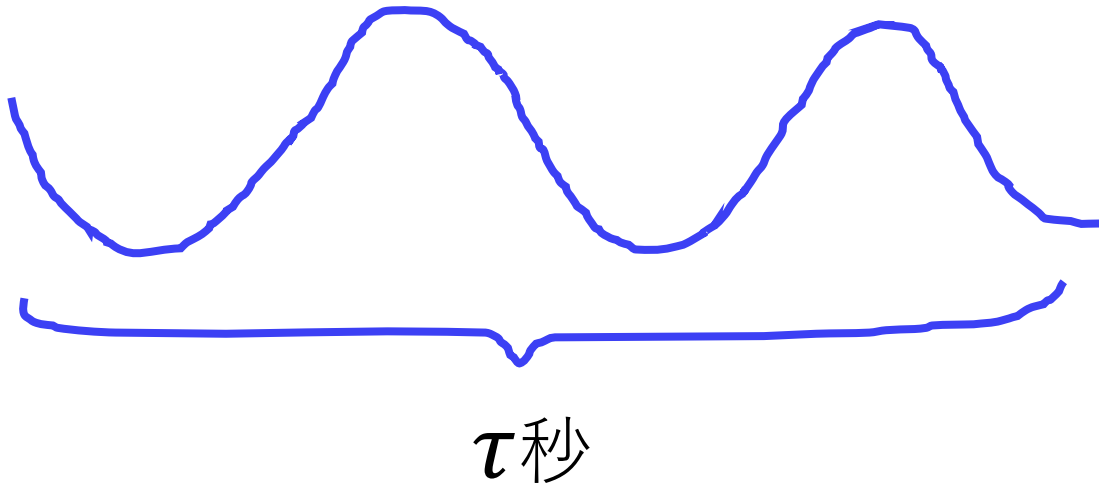
$$\int S df = S \int df = S\Delta f = \langle P^2 \rangle$$

- I. 平均光子数： $N = \bar{n}\tau = \frac{\bar{P}}{\hbar\omega}\tau$
- II. 光子数の標準偏差： $\sigma_N = \sqrt{\bar{n}\tau}$

- III. レーザーパワーの標準偏差： $\sigma_P = \frac{\hbar\omega}{\tau}\sigma_N = \sqrt{\frac{\hbar\omega\bar{P}}{\tau}}$ 長時間測定すると0に近づく

ショットノイズの復習

- レーザー光に含まれる光子の数はポアソン分布に従う
- 平均と分散が等しく、時間的な相関はない（パワースペクトルは定数）



- 一秒に平均 \bar{n} 個の光子
(光のパワーは $\bar{P} [W] = \hbar\omega\bar{n}$)

- パワースペクトルの積分が分散

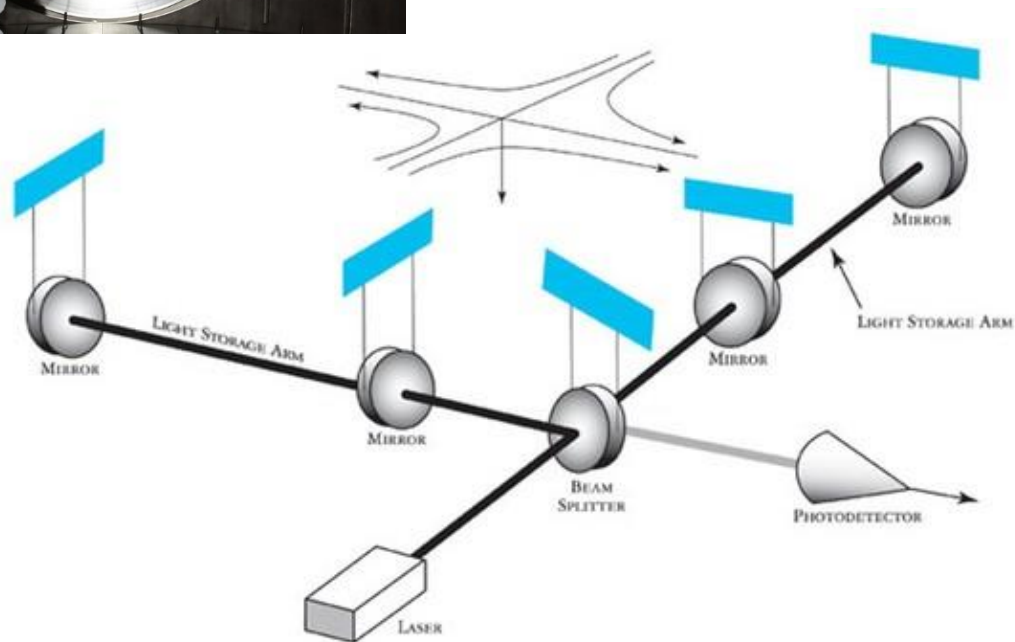
$$\int S df = S \int df = S\Delta f = \langle P^2 \rangle$$

- I. 平均光子数： $N = \bar{n}\tau = \frac{\bar{P}}{\hbar\omega}\tau$
- II. 光子数の標準偏差： $\sigma_N = \sqrt{\bar{n}\tau}$

III. レーザーパワーの標準偏差： $\sigma_P = \frac{\hbar\omega}{\tau}\sigma_N = \sqrt{\frac{\hbar\omega\bar{P}}{\tau}} = \sqrt{\hbar\omega\bar{P}\Delta f}$

パワースペクトル（のルート）は

線形計測の空間分解能



線形変位計測

$$y = Ax + \zeta \leftarrow w$$

w

$\frac{w}{m}$

m

読み取り誤差 (ショットノイズとか)

長時間平均化すると 0

- 測定率 (何秒測定すると量子揺らぎがみえるか)

$$\Gamma_{\text{meas}} = \frac{x_{zpf}^2}{S_{\zeta\zeta}/A^2} = \frac{x_{zpf}^2}{S_{\text{imp}}}$$

Hz

$\frac{W^2}{\text{Hz}}$

$\frac{\text{m}^2}{\text{Hz}}$

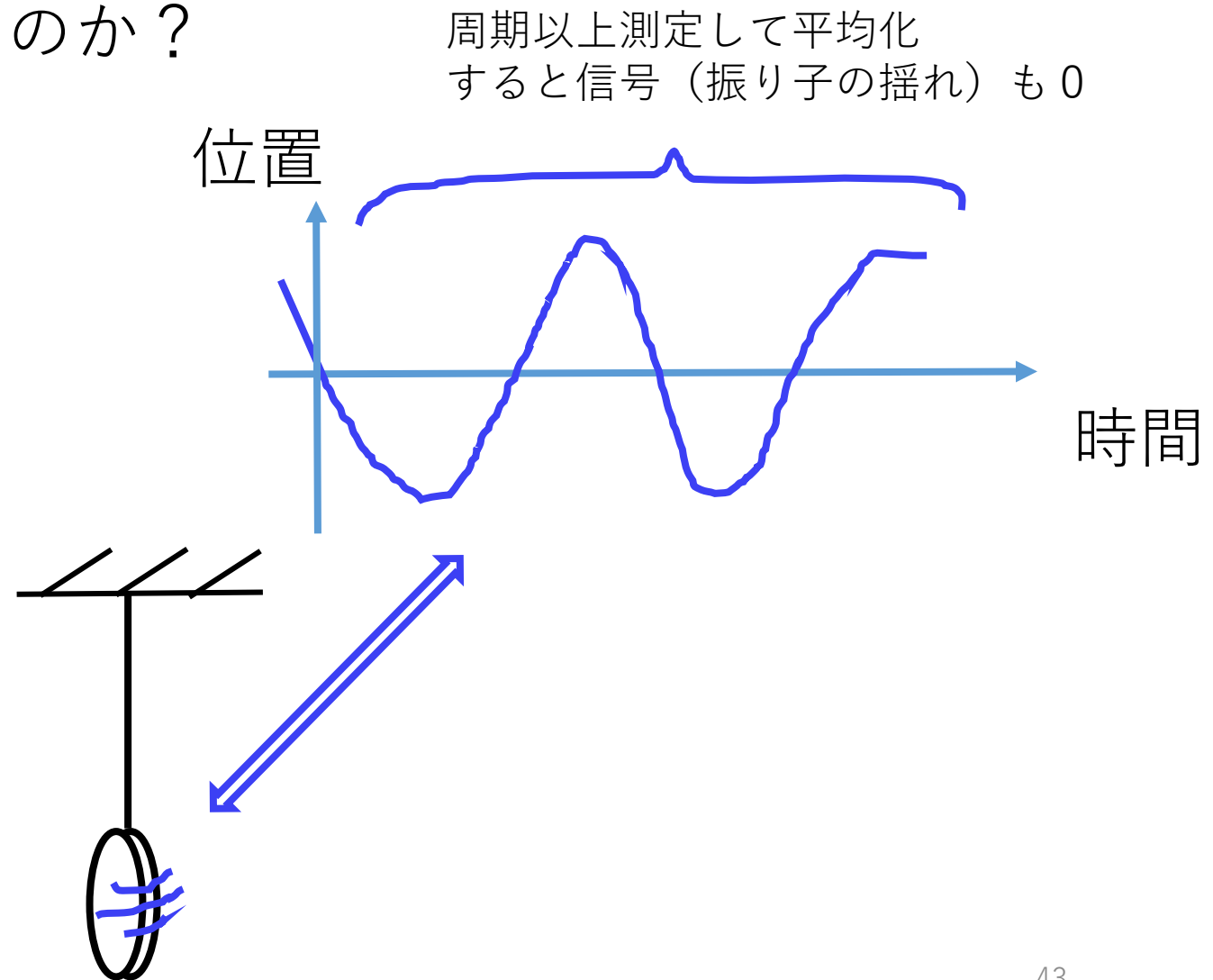
imprecision: 不明確な

測定時間の制限

- 測定時間は無限に大きくしていいのか？

→もちろんダメ

- **一つの上限は周期 ($2\pi/\omega_m$)**



量子計測の目標

- 測定時間に制限はないのか？

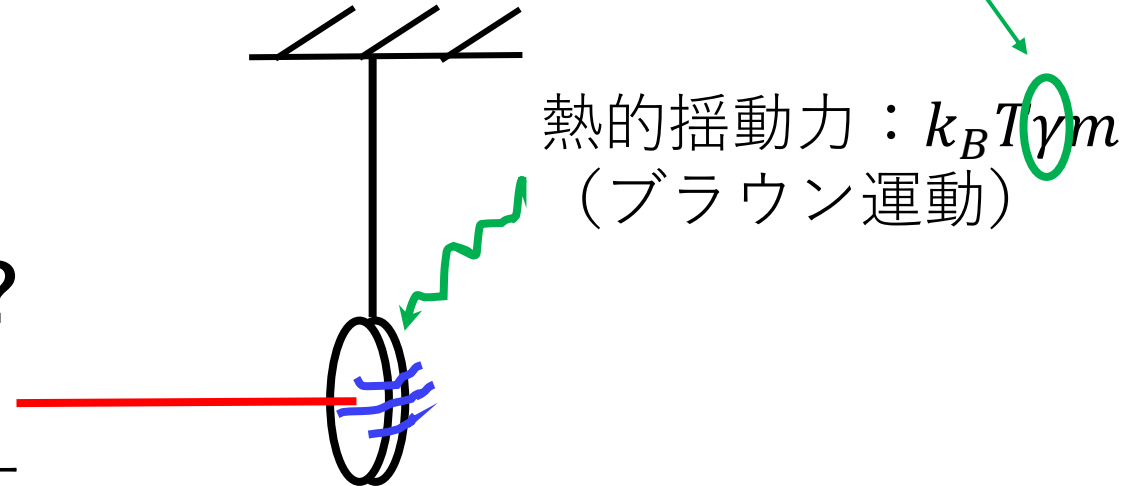
課題：測定時間内にも外乱（熱的揺動力）が入る

エネルギー散逸
(励起した振動子が何秒揺れるか)

デコヒーレンス率：
どのくらいのレートでフォノンが
環境から出たり入ったりしているのか？

$\rightarrow \gamma n_{th}$

レーザー
(線形計測)
の測定率： Γ_{meas}

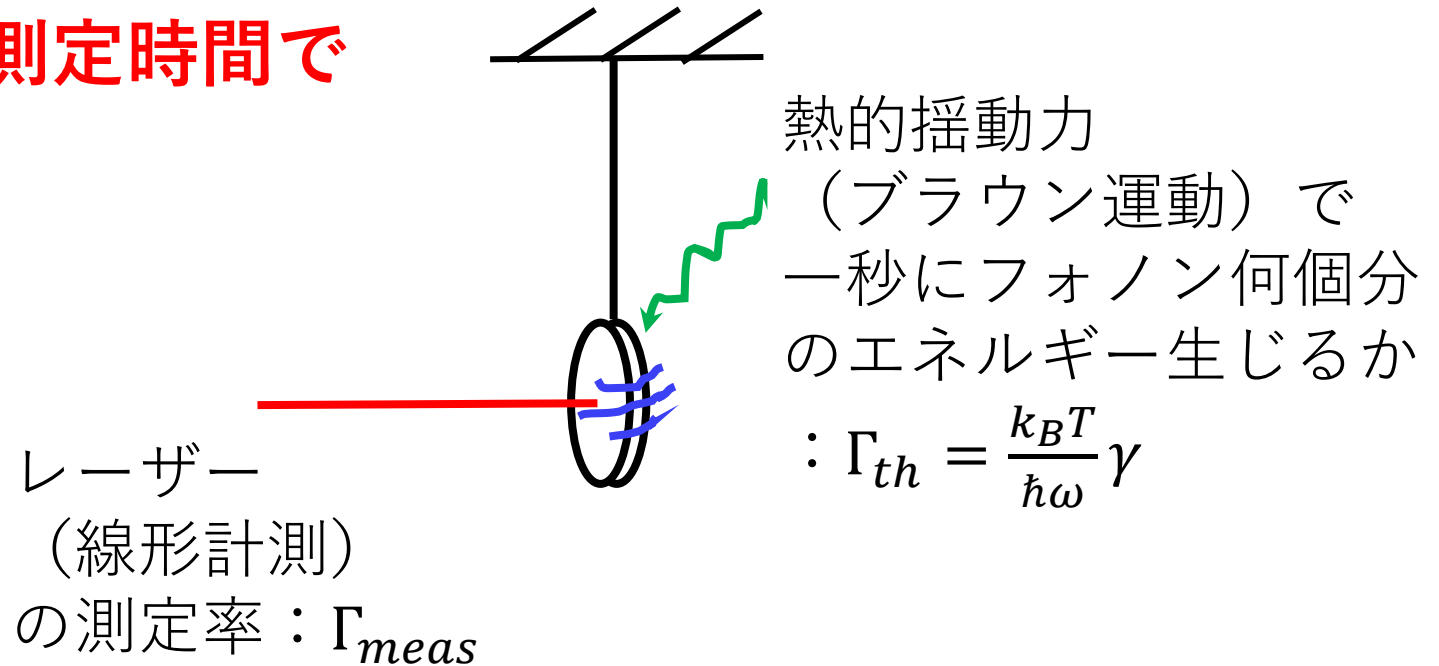


熱的揺動力： $k_B T \gamma m$
(ブラウン運動)

古典的な振動（ブラウン運動）の影響

- 量子計測の条件
 $\Gamma_{meas} > \Gamma_{th} (\equiv n_{th} \gamma)$

フォノン1個生成するより短い測定時間で
量子揺らぎを計測可能な分解能
に達すればよい



もう少し定量的には？

- 量子計測の条件

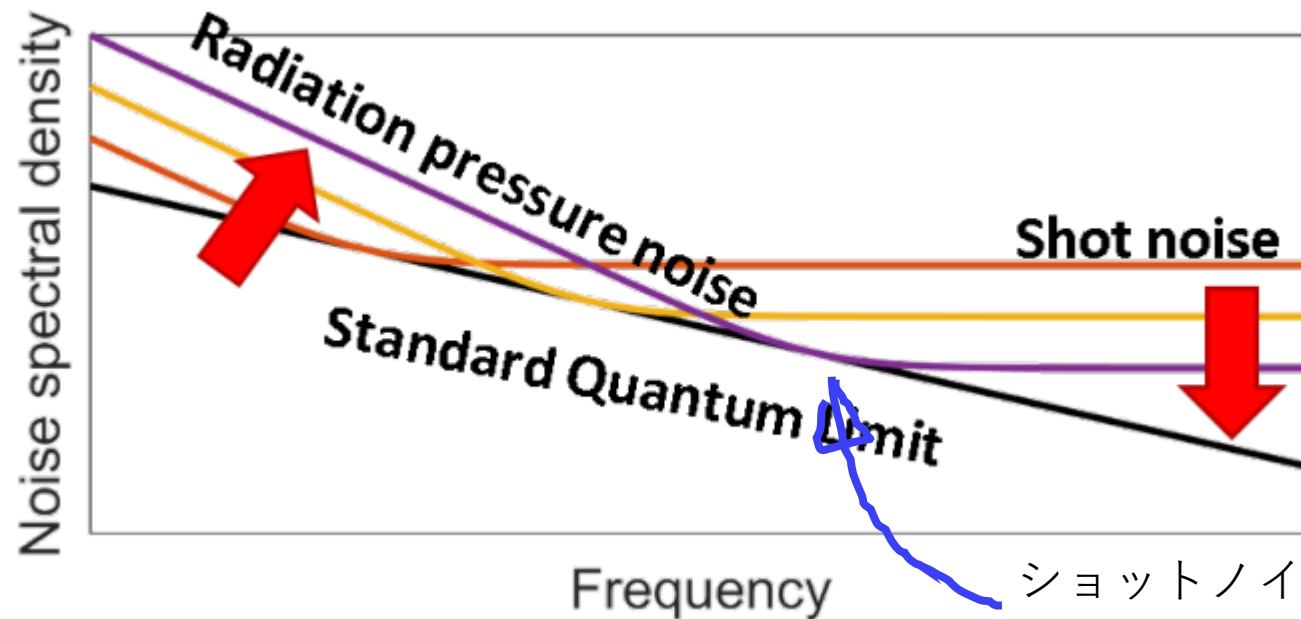
$$\Gamma_{meas} > \Gamma_{th}$$

$$\frac{x_{zpf}^2}{\hbar\omega_{laser}P_{in}/A^2} > \frac{k_B T}{\hbar\omega} \gamma,$$

$$A = 2\pi \frac{P_{in}}{\lambda}, \quad P_{in} = \pi c \lambda m f^2$$

マイケルソン干渉計の
場合の感度係数

標準量子限界に達する
ためのレーザーパワー



ショットノイズと量子反作用が等しい

もう少し定量的には？

- 量子計測の条件

$$\Gamma_{meas} > \Gamma_{th}$$

$$\frac{x_{zpf}^2}{\hbar\omega_{laser}P_{in}/A^2} > \frac{k_B T}{\hbar\omega} \gamma, \quad A = 2\pi \frac{P_{in}}{\lambda}, P_{in} = \pi c \lambda m f^2$$

$$\frac{\hbar}{2m\omega} \frac{1}{\hbar\omega_{laser}} \pi c \lambda m f^2 \frac{(2\pi)^2}{\lambda^2} > \frac{k_B T}{\hbar\omega} \gamma$$

もう少し定量的には？

- 量子計測の条件

$$\Gamma_{meas} > \Gamma_{th}$$

$$\frac{x_{zpf}^2}{\hbar\omega_{laser}P_{in}/A^2} > \frac{k_B T}{\hbar\omega} \gamma, \quad A = 2\pi \frac{P_{in}}{\lambda}, P_{in} = \pi c \lambda m f^2$$

$$\frac{\cancel{\hbar}}{2m\cancel{\omega}} \frac{1}{\cancel{\hbar}\omega_{laser}} \pi c \cancel{\lambda} m \cancel{f}^2 \frac{(2\pi)^2}{\lambda^2} > \frac{k_B T}{\cancel{\hbar}\omega} \gamma$$

もう少し定量的には？

- 量子計測の条件

$$\Gamma_{meas} > \Gamma_{th}$$

$$\frac{x_{zpf}^2}{\hbar \omega_{laser} P_{in} / A^2} > \frac{k_B T}{\hbar \omega} \gamma, \quad A = 2\pi \frac{P_{in}}{\lambda}, P_{in} = \pi c \lambda m f^2$$

The diagram illustrates the derivation of the quantum measurement condition with several annotations:

- A green oval highlights the term $(2\pi)^2 f^2$ in the numerator of the fraction $\frac{\pi c \lambda m f^2 (2\pi)^2}{\lambda^2}$.
- A blue oval highlights the term λ^2 in the denominator of the same fraction.
- A red diagonal line is drawn through the term $\pi c \lambda m f^2$.
- A blue arrow points from the blue oval (λ^2) to the expression $\frac{\omega_{laser}}{2}$.
- A green arrow points from the green oval ($(2\pi)^2 f^2$) to the expression ω^2 .
- Other terms in the equation are crossed out with black or red lines: \hbar in the denominator of the first fraction, $2m\omega$ in the denominator of the second fraction, $\hbar\omega_{laser}$ in the denominator of the second fraction, and $\hbar\omega$ in the denominator of the right-hand side.

$$\frac{\cancel{\hbar}}{2m\omega \cancel{\hbar\omega_{laser}}} \frac{1}{\cancel{\pi c \lambda m f^2} \frac{(2\pi)^2}{\lambda^2}} > \frac{k_B T}{\cancel{\hbar\omega}} \gamma$$

ω^2

$\frac{\omega_{laser}}{2}$

もう少し定量的には？

- 量子計測の条件

$$\Gamma_{meas} > \Gamma_{th}$$

$$\frac{x_{zpf}^2}{\hbar \omega_{laser} P_{in} / A^2} > \frac{k_B T}{\hbar \omega} \gamma, \quad A = 2\pi \frac{P_{in}}{\lambda}, P_{in} = \pi c \lambda m f^2$$

$$\frac{\cancel{\hbar}}{2m\cancel{\omega_{laser}}} \frac{1}{\cancel{\hbar \omega_{laser}}} \frac{\pi c \lambda m f^2}{\lambda^2} > \frac{k_B T}{\cancel{\hbar \omega}} \gamma$$

$\frac{\omega_{laser}}{2}$

$$\boxed{\frac{\omega^2}{\gamma} > \frac{4k_B T}{\hbar}}$$

もう少し定量的には？

- 量子計測の条件

$$\Gamma_{meas} > \Gamma_{th}$$

標準量子限界感度を仮定すると↑の条件は次のように書ける

振動子の共振周波数 $\rightarrow \omega^2$

ボルツマン定数 $\rightarrow k_B$

振動子の（バルクの）温度 $\rightarrow T$

プランク定数 $\rightarrow \hbar$

振動子のエネルギー散逸 $\rightarrow \gamma$

$$\frac{\omega^2}{\gamma} > \frac{4k_B T}{\hbar}$$



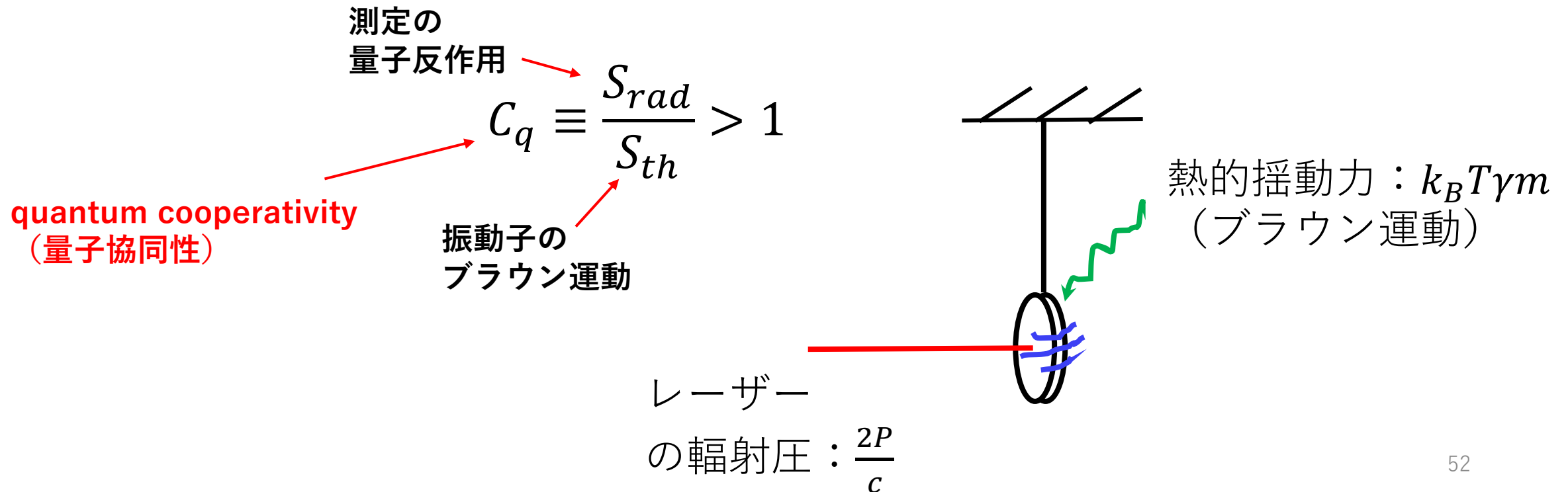
エネルギー散逸下げると温度を下げる
のと同様な効果

定性的には？

- 量子計測の条件

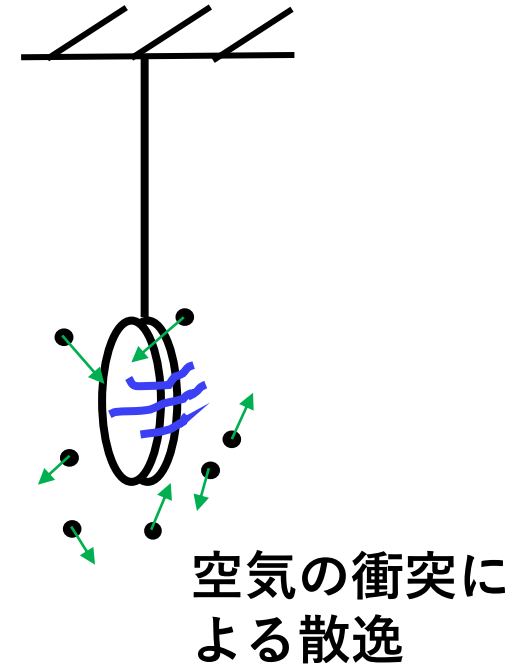
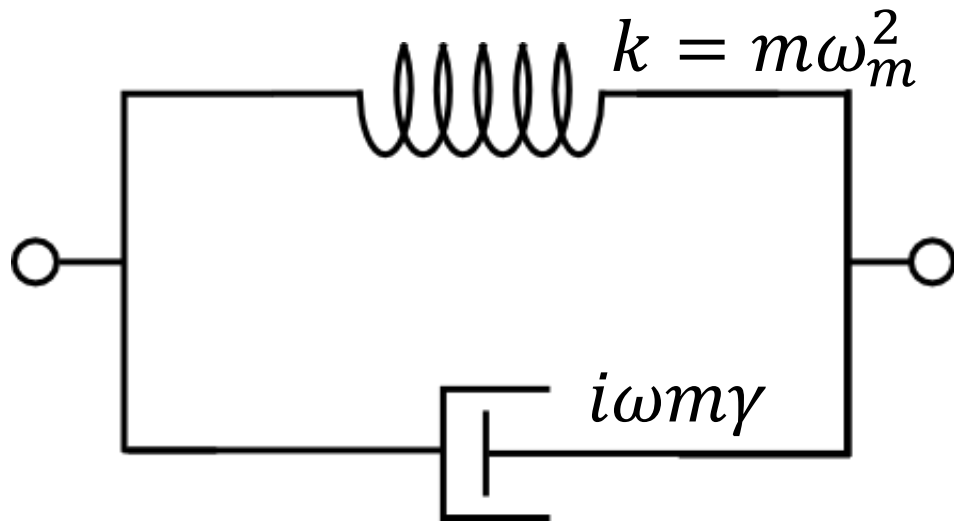
$$\Gamma_{meas} > \Gamma_{th}$$

標準量子限界感度を仮定すると↑の条件は次のようにも書ける



どうすれば散逸が小さくなるか？

- 身近な散逸源→空気抵抗



どうすれば散逸が小さくなるか？

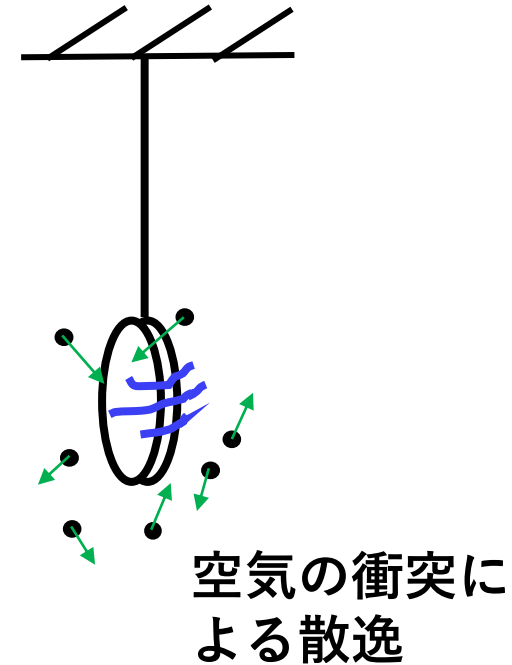
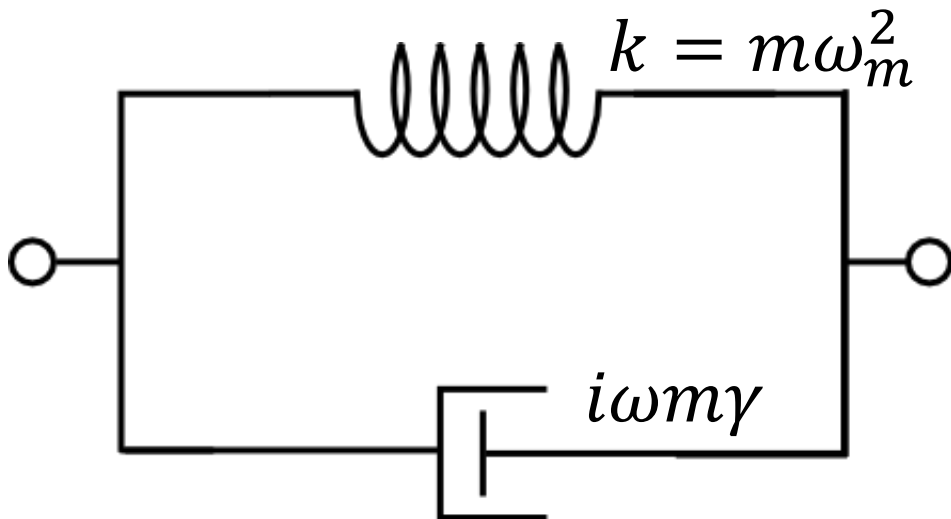
- 散逸のモデル

- $m\ddot{x} = -kx - m\gamma\dot{x}$

フーリエ変換すると

- $-m\omega^2 x = -(k + im\omega\gamma)x$

複素ばね定数



どうすれば散逸が小さくなるか？

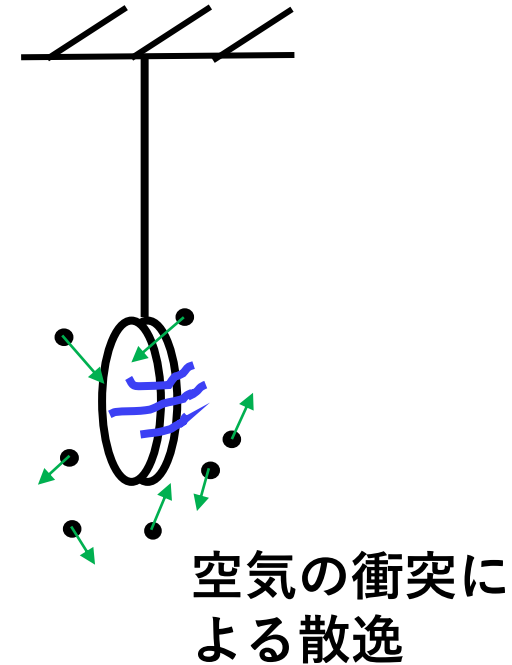
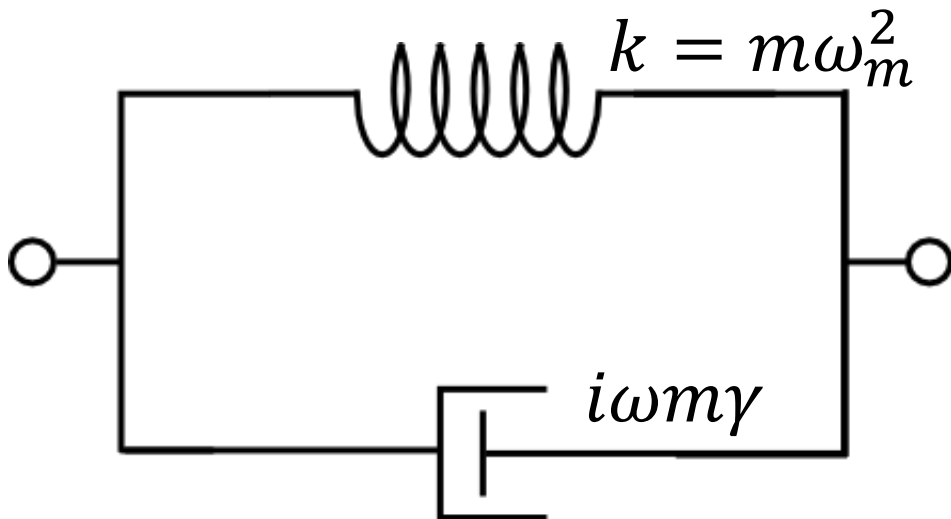
- 散逸のモデル

- $m\ddot{x} = -kx - m\gamma\dot{x}$

フーリエ変換すると

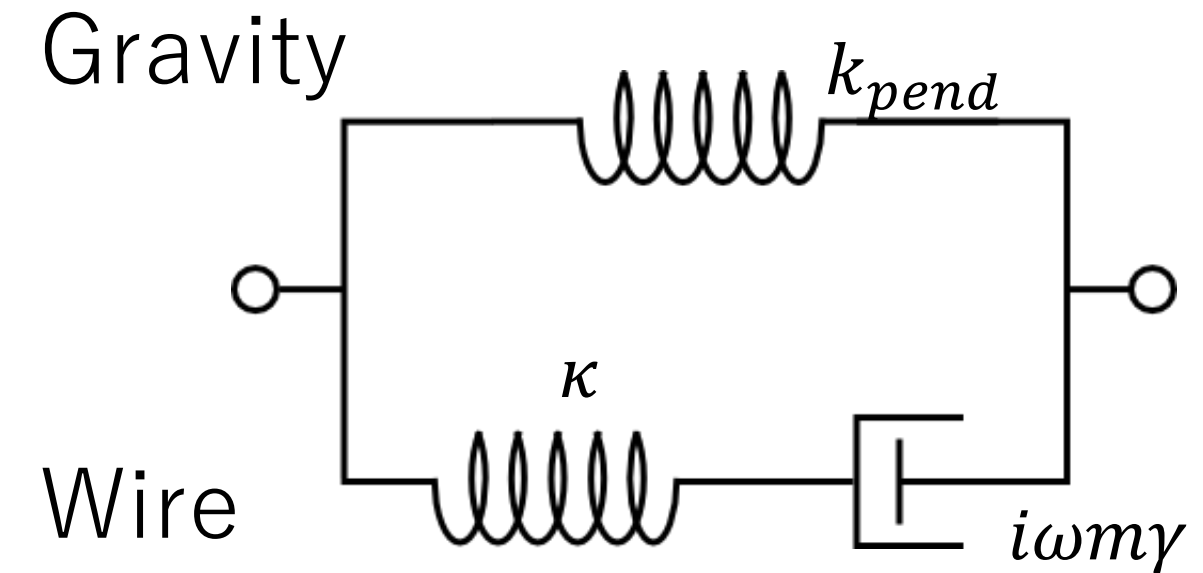
- $-m\omega^2 x = -(k + im\omega\gamma)x = -k(1 + i\phi)x$

ロスアングル： $\phi = \frac{\omega}{\omega_0 Q}$

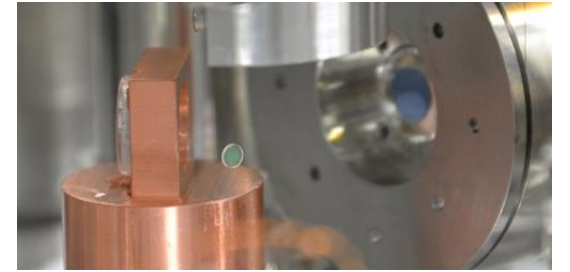


どうすれば散逸が小さくなるか？

- 振り子の散逸のトイモデル (Zener model)



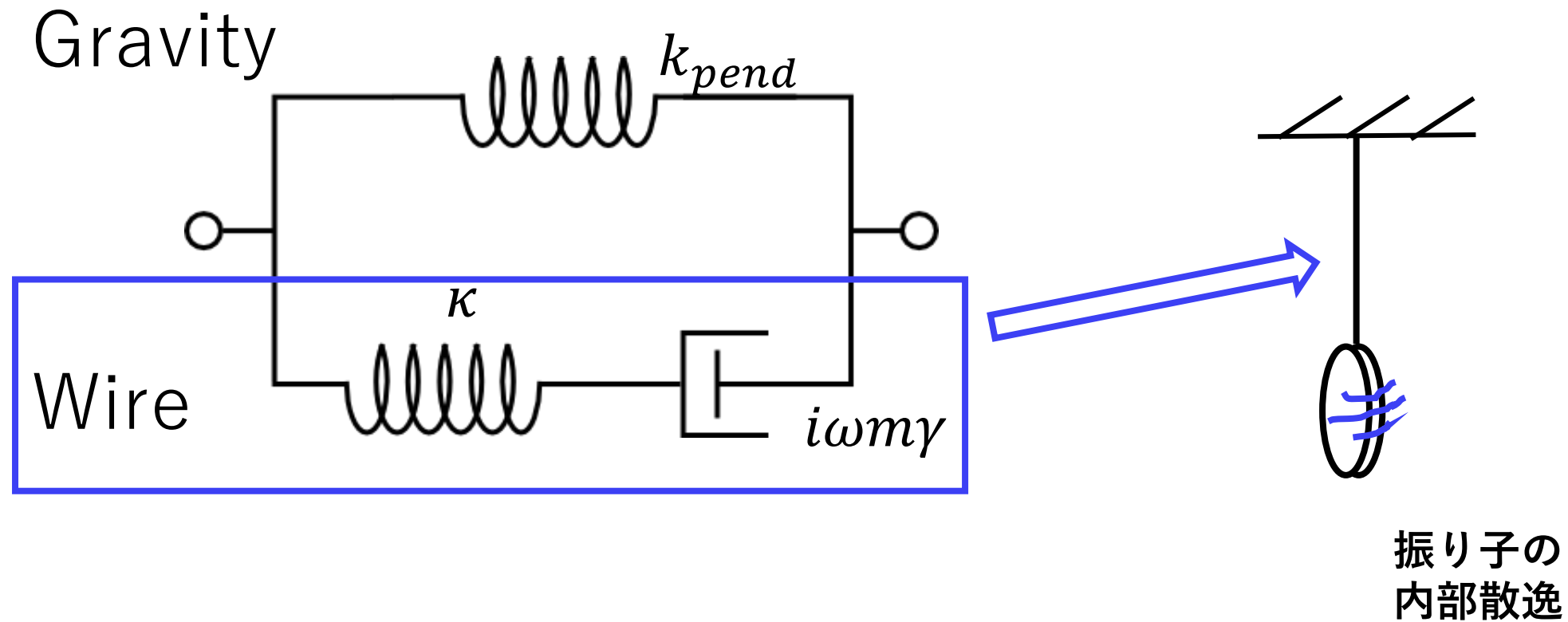
松本研の振り子



重力波検出器の振り子

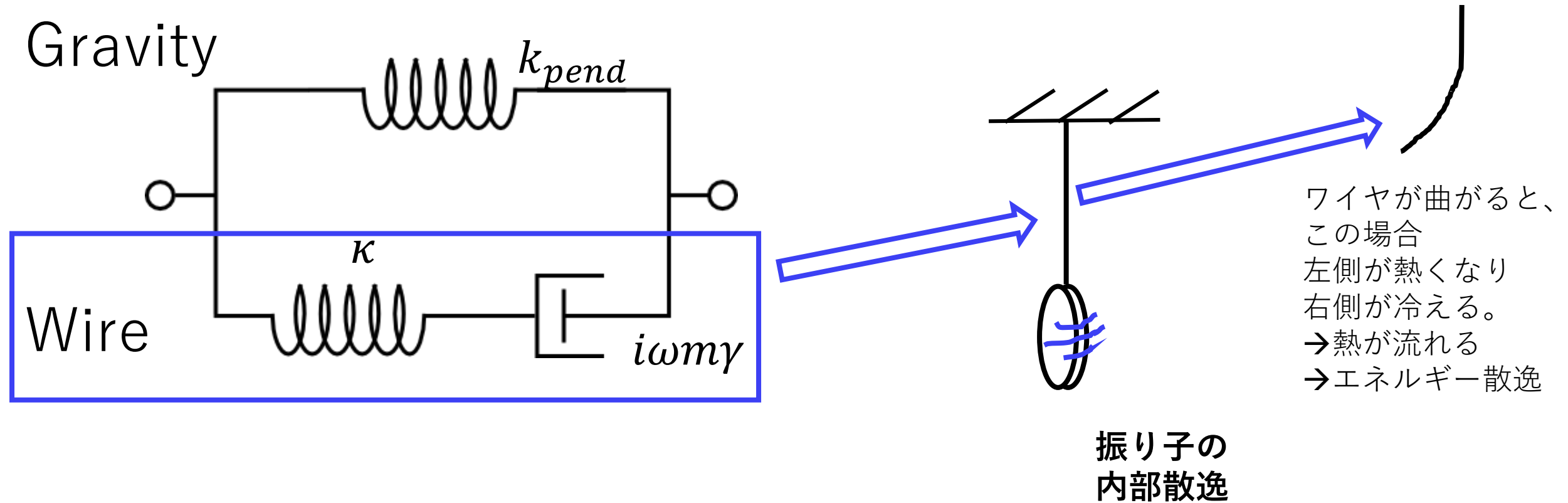
どうすれば散逸が小さくなるか？

- 振り子の散逸のトイモデル (Zener model)



どうすれば散逸が小さくなるか？

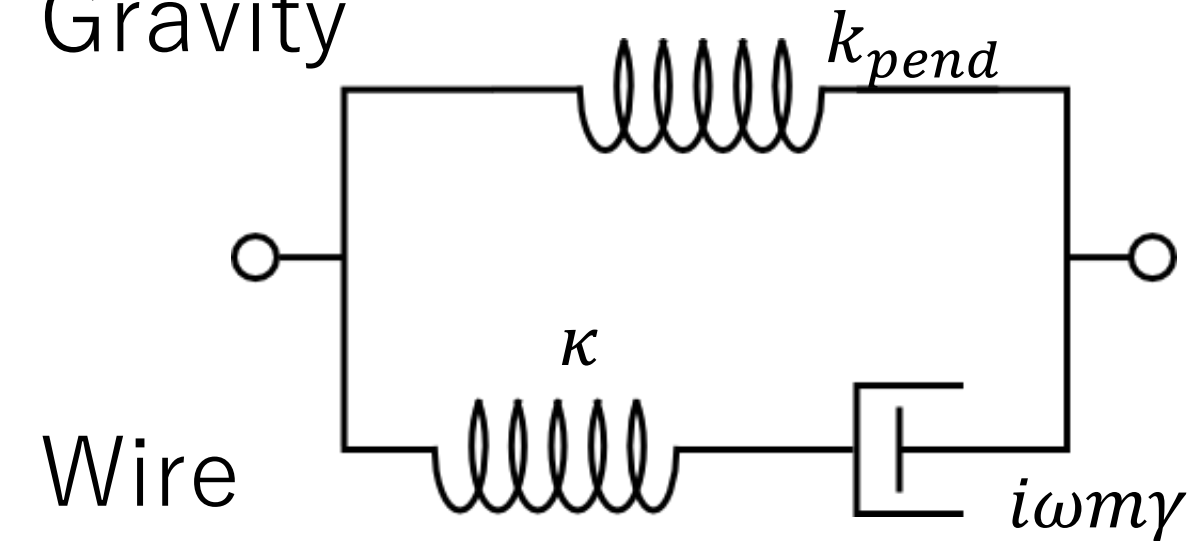
- 振りの散逸のトイモデル (Zener model)



どうすれば散逸が小さくなるか？

- 振り子の散逸のトイモデル (Zener model)

Gravity

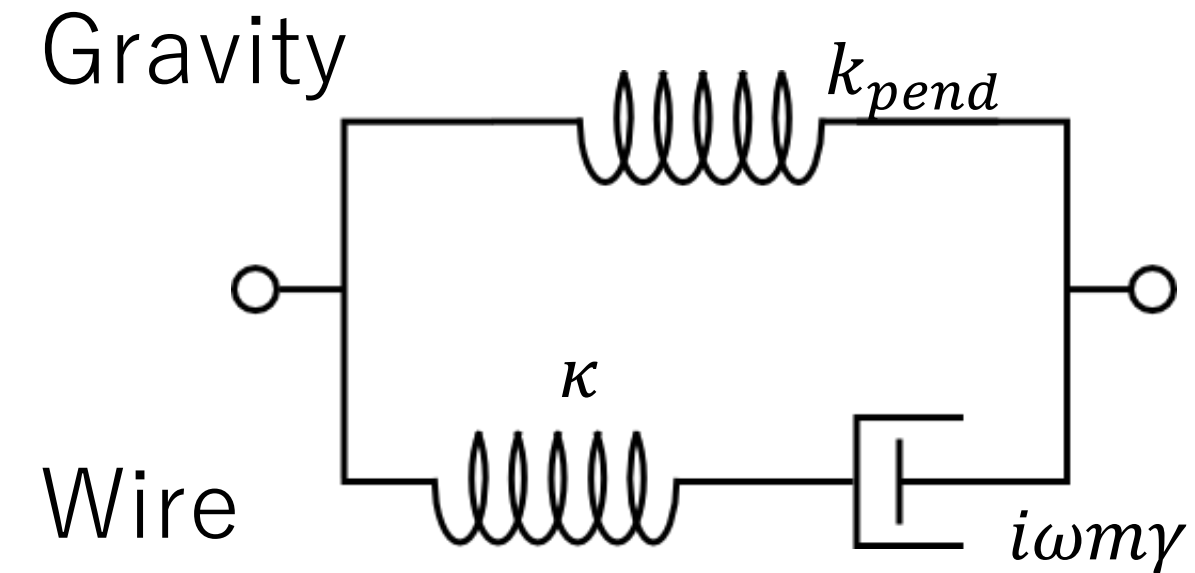


散逸の項

$$k_{pend} \simeq k_{grav} \left(1 + i\omega \frac{\kappa}{k_{grav}} \frac{\kappa^2 m\gamma}{\kappa^2 + (\omega m\gamma)^2} \right)$$

どうすれば散逸が小さくなるか？

- 振り子の散逸のトイモデル (Zener model)



散逸の項

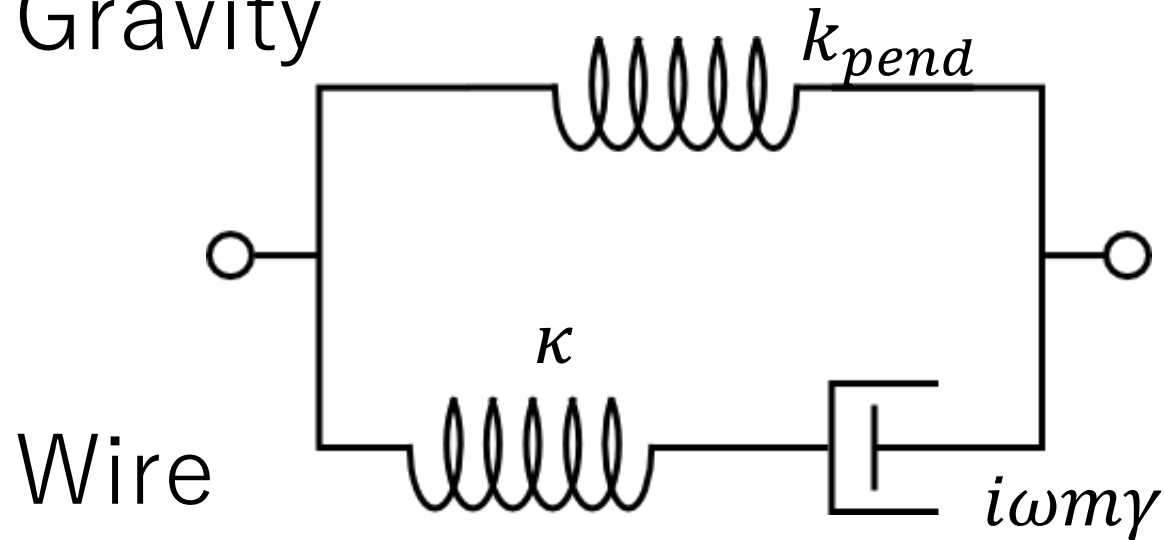
$$k_{pend} \simeq k_{grav} \left(1 + i\omega \frac{\kappa}{k_{grav}} \frac{\kappa^2 m\gamma}{\kappa^2 + (\omega m\gamma)^2} \right)$$

dissipation dilution
(散逸の希薄化)

どうすれば散逸が小さくなるか？

- 振り子の散逸のトイモデル (Zener model)

Gravity



**ワイヤを細く長く
すればよい**

→ 直径 1 μm 、長さ 5 cm
のシリカ線で吊るした

→ 100 時間程度揺れ続ける
世界最小散逸を実現

→ 量子計測の条件を達成

散逸の項

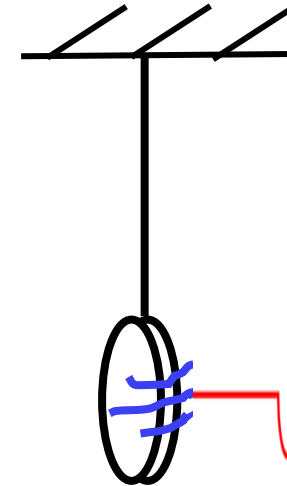
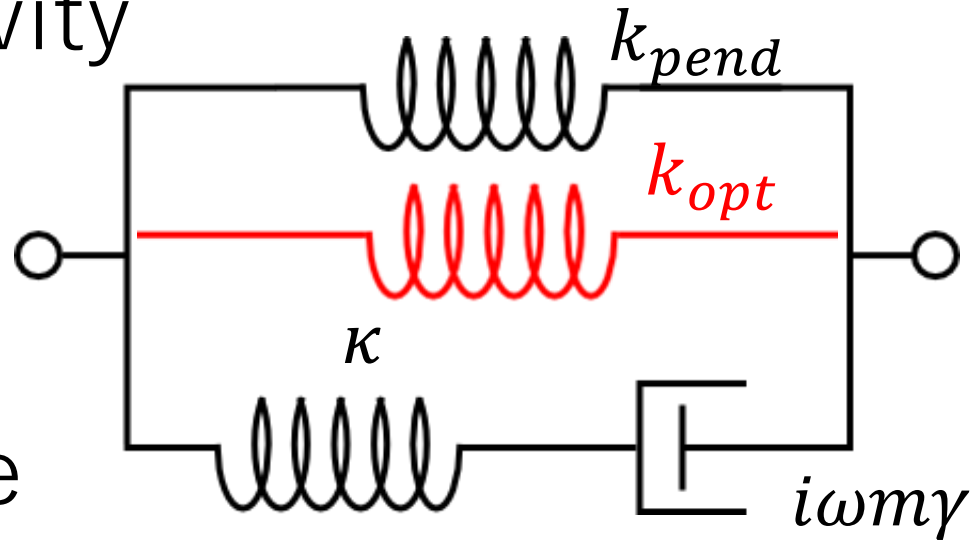
$$k_{\text{pend}} \simeq k_{\text{grav}} \left(1 + i\omega \frac{\kappa}{k_{\text{grav}}} \frac{\kappa^2 m \gamma}{\kappa^2 + (\omega m \gamma)^2} \right)$$

**dissipation dilution
(散逸の希薄化)**

さらに散逸を小さく！

- 光学トラップでさらに低減

Gravity



レーザーでつくった
ばね（光ばね）
でさらに希薄化
(optical dilution)

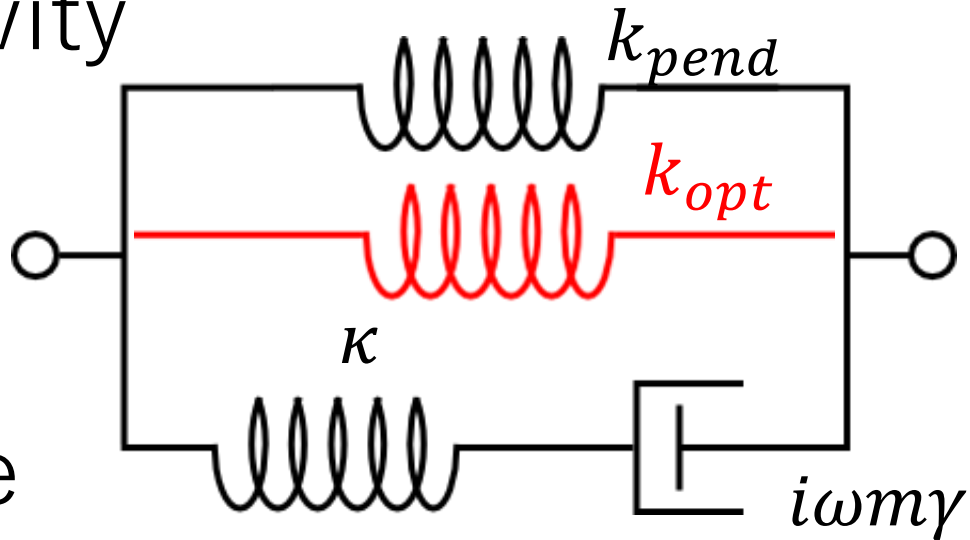
振り子の
内部散逸

$$k_{opt} \simeq k_{opt} \left(1 + i \frac{\kappa}{k_{opt}} \phi_w \right), \phi_w := \frac{1}{Q_w}$$

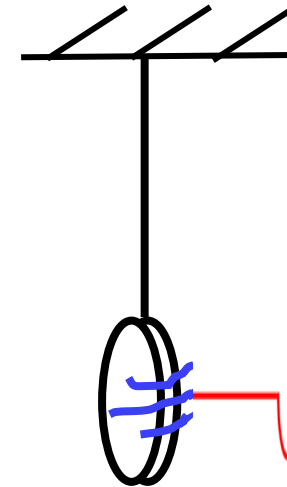
さらに散逸を小さく！

- 光学トラップでさらに低減

Gravity



Wire



レーザーでつくった
ばね（光ばね）
でさらに希薄化
(optical dilution)

振り子の
内部散逸

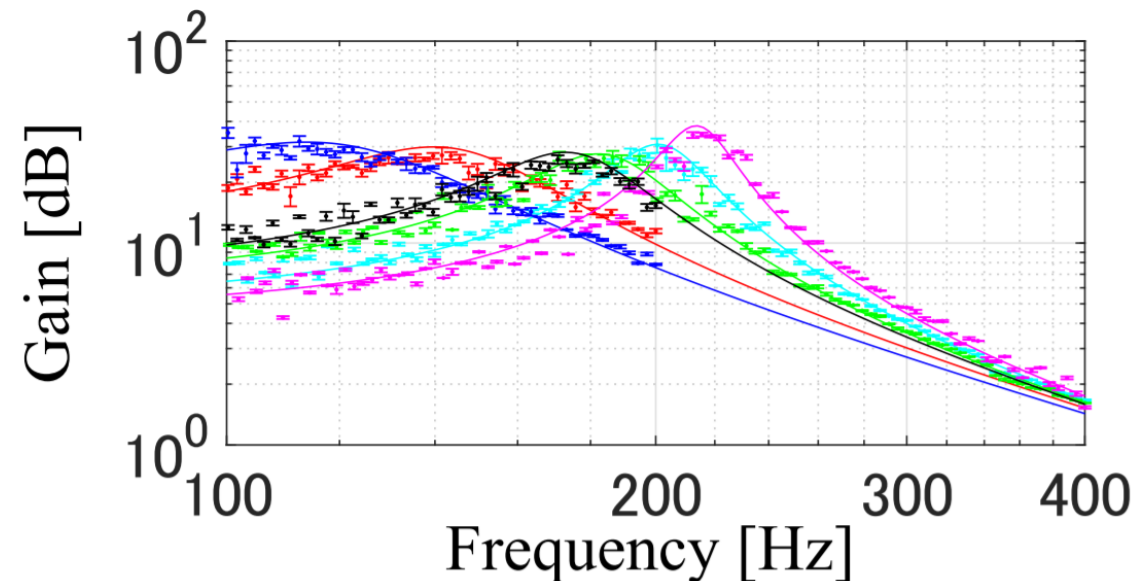
$$k_{opt} \simeq k_{opt} \left(1 + i \frac{\kappa}{k_{opt}} \phi_w \right), \phi_w := \frac{1}{Q_w}$$

Q値が共振周波数の2次で増大

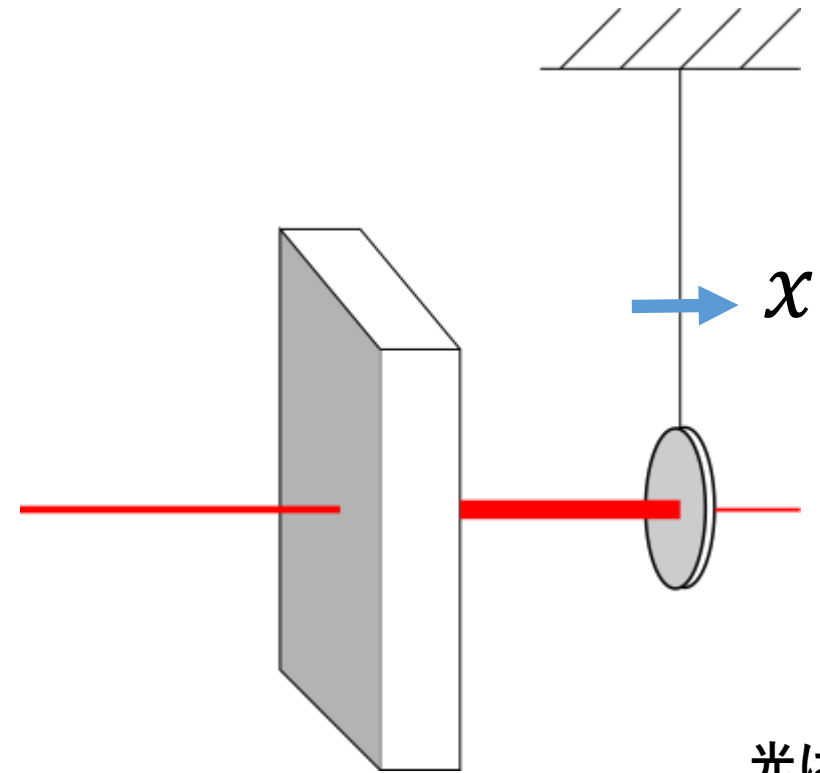
光ばね

- 共振からずらした（離調）場合、
光圧で復元力をつくれる

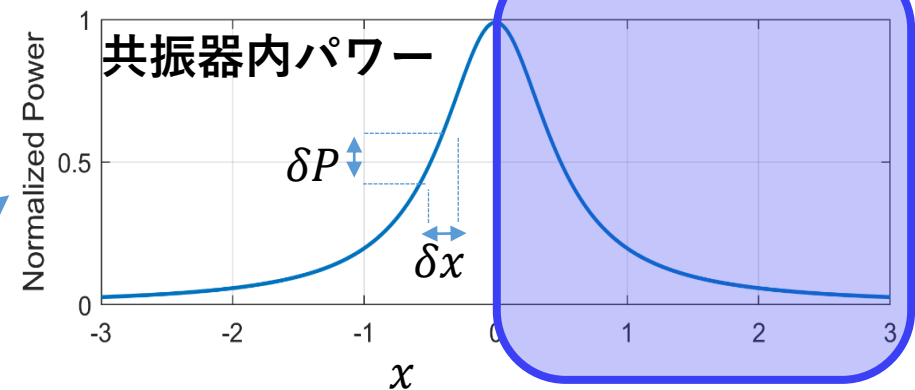
光の周波数がとても高い(>100 THz)
ため、熱雑音のない理想ばねとなる



\propto 光圧



光ばねによる
復元力は正



具体的に計算してみよう！

PHYSICAL REVIEW LETTERS **124**, 221102 (2020)

High- Q Milligram-Scale Monolithic Pendulum for Quantum-Limited Gravity Measurements

Seth B. Cataño-Lopez^{1,*}, Jordy G. Santiago-Condori¹, Keiichi Edamatsu¹ and Nobuyuki Matsumoto^{1,2,3,†}

¹*Research Institute of Electrical Communication, Tohoku University, Sendai 980-8577, Japan*

²*Frontier Research Institute for Interdisciplinary Sciences, Tohoku University, Sendai 980-8578, Japan*

³*JST, PRESTO, Kawaguchi, Saitama 332-0012, Japan*



(Received 23 January 2020; revised manuscript received 1 May 2020; accepted 13 May 2020; published 4 June 2020)

We present the development of a high- Q monolithic silica pendulum weighing 7 milligram. The measured Q value for the pendulum mode at 2.2 Hz was 2.0×10^6 . To the best of our knowledge this is the lowest dissipative milligram-scale mechanical oscillator to date. By employing this suspension system, the optomechanical displacement sensor for gravity measurements we recently reported in Matsumoto *et al.* [Phys. Rev. Lett. **122**, 071101 (2019)] can be improved to realize quantum-noise-limited sensing at several hundred hertz. In combination with the optical spring effect, the amount of intrinsic dissipation measured in the pendulum mode is enough to satisfy requirements for measurement-based quantum control of a massive pendulum confined in an optical potential. This paves the way for not only testing dark matter via quantum-limited force sensors, but also Newtonian interaction in quantum regimes, namely, between two milligram-scale oscillators in quantum states, as well as improving the sensitivity of gravitational-wave detectors.

具体的に計算してみよう！

PHYSICAL REVIEW LETTERS **124**, 221102 (2020)

High- Q Milligram-Scale Monolithic Pendulum for Quantum-Limited Gravity Measurements

Seth B. Cataño-Lopez^{1,*}, Jordy G. Santiago-Condori¹, Keiichi Edamatsu¹, and Nobuyuki Matsumoto²

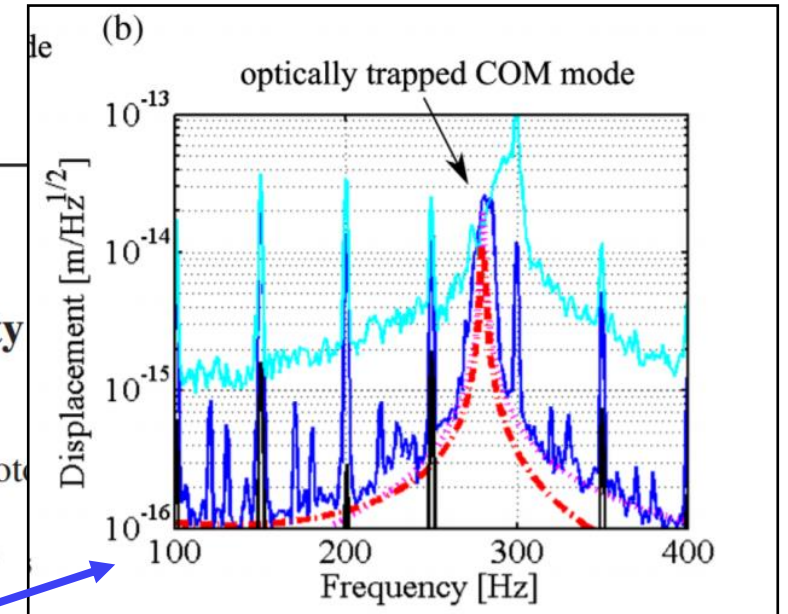
¹Research Institute of Electrical Communication, Tohoku University, Sendai 980-8577, Japan

²Frontier Research Institute for Interdisciplinary Sciences, Tohoku University, Sendai 980-8578, Japan

³JST, PRESTO, Kawaguchi, Saitama 332-0012, Japan

(Received 23 January 2020; revised manuscript received 1 May 2020; accepted 13 May 2020; published 4 June 2020)

We present the development of a high- Q monolithic silica pendulum weighing 7 milligram. The measured Q value for the pendulum mode at 2.2 Hz was 2.0×10^6 . To the best of our knowledge this is the lowest dissipative milligram-scale mechanical oscillator to date. By employing this suspension system, the optomechanical displacement sensor for gravity measurements we recently reported in Matsumoto *et al.* [Phys. Rev. Lett. **122**, 071101 (2019)] can be improved to realize quantum-noise-limited sensing at several hundred hertz. In combination with the optical spring effect, the amount of intrinsic dissipation measured in the pendulum mode is enough to satisfy requirements for measurement-based quantum control of a massive pendulum confined in an optical potential. This paves the way for not only testing dark matter via quantum-limited force sensors, but also Newtonian interaction in quantum regimes, namely, between two milligram-scale oscillators in quantum states, as well as improving the sensitivity of gravitational-wave detectors.



↑ 光ばねで300 Hzくらいに
共振周波数高めて、
なおかつ、
精密光計測を実現して
**structural dampingを
実証済み**

具体的に計算してみよう！

- 条件： $\frac{\omega_0^2}{\gamma(\omega_0)} > \frac{4k_B T}{\hbar}$

具体的に計算してみよう！

• 条件： $\frac{\omega_0^2}{\gamma(\omega_0)} > \frac{4k_B T}{\hbar}$

$\sim (2\pi \times 2)^2 / 6e-6 \sim 3e7$

具体的に計算してみよう！

• 条件： $\frac{\omega_0^2}{\gamma(\omega_0)} > \frac{4k_B T}{\hbar} \longrightarrow \sim 1\text{e-}23 * 300 / 1\text{e-}34 = 3\text{e}13$

\searrow
 $\sim (2*\text{pi}*2)^2 / 6\text{e-}6 \sim 3\text{e}7$

具体的に計算してみよう！

• 条件： $\frac{\omega_0^2}{\nu(\omega_0)} > \frac{4k_B T}{\hbar} \longrightarrow \sim 1\text{e-}23 * 300 / 1\text{e-}34 = 3\text{e}13$

$\sim (2 * \pi * 2)^2 / 6\text{e-}6 \sim 3\text{e}7$

6桁足りない

具体的に計算してみよう！

- 条件： $\frac{\omega_0^2}{\gamma(\omega_0)} > \frac{4k_B T}{\hbar} \longrightarrow \sim 1\text{e-}23 * 300 / 1\text{e-}34 = 3\text{e}13$
 $\sim (2*\text{pi}*2)^2 / 6\text{e-}6 \sim 3\text{e}7$
6桁足りない
- 光ばねがあると $\rightarrow \frac{\omega_{opt}^2}{\gamma(\omega_{opt})} > \frac{4k_B T}{\hbar} \Leftrightarrow \frac{\omega_0^2}{\gamma(\omega_{opt})}$

具体的に計算してみよう！

- 条件： $\frac{\omega_0^2}{\gamma(\omega_0)} > \frac{4k_B T}{\hbar} \rightarrow \sim 1\text{e-}23 * 300 / 1\text{e-}34 = 3\text{e}13$
 $\sim (2*\pi*2)^2 / 6\text{e-}6 \sim 3\text{e}7$
6桁足りない
- 光ばねがあると $\rightarrow \frac{\omega_{opt}^2}{\gamma(\omega_{opt})} > \frac{4k_B T}{\hbar} \Leftrightarrow \frac{\omega_0^2}{\gamma(\omega_{opt})} > \frac{4k_B T}{\hbar} \left(\frac{\omega_0}{\omega_{opt}} \right)^2$

具体的に計算してみよう！

• 条件： $\frac{\omega_0^2}{\gamma(\omega_0)} > \frac{4k_B T}{\hbar} \longrightarrow \sim 1\text{e-}23 * 300 / 1\text{e-}34 = 3\text{e}13$

$\sim (2 * \pi * 2)^2 / 6\text{e-}6 \sim 3\text{e}7$

6桁足りない

• 光ばねがあると $\rightarrow \frac{\omega_{opt}^2}{\gamma(\omega_{opt})} > \frac{4k_B T}{\hbar} \Leftrightarrow \frac{\omega_0^2}{\gamma(\omega_{opt})} > \frac{4k_B T}{\hbar} \left(\frac{\omega_0}{\omega_{opt}} \right)^2$

$\sim (2 / 300)^2 = 4\text{e-}5$
(逆数とると2e4)

具体的に計算してみよう！

• 条件： $\frac{\omega_0^2}{\gamma(\omega_0)} > \frac{4k_B T}{\hbar} \longrightarrow \sim 1\text{e-}23 * 300 / 1\text{e-}34 = 3\text{e}13$

$\sim (2 * \pi * 2)^2 / 6\text{e-}6 \sim 3\text{e}7$

6桁足りない

• 光ばねがあると $\rightarrow \frac{\omega_{opt}^2}{\gamma(\omega_{opt})} > \frac{4k_B T}{\hbar} \Leftrightarrow \frac{\omega_0^2}{\gamma(\omega_{opt})} > \frac{4k_B T}{\hbar} \left(\frac{\omega_0}{\omega_{opt}} \right)^2$

$\sim (2 / 300)^{-1} = 150$

$\sim (2 / 300)^2 = 4\text{e-}5$
(逆数とると2e4)

具体的に計算してみよう！

• 条件： $\frac{\omega_0^2}{\gamma(\omega_0)} > \frac{4k_B T}{\hbar} \longrightarrow \sim 1e-23 * 300 / 1e-34 = 3e13$

$\sim (2 * \pi * 2)^2 / 6e-6 \sim 3e7$

6桁足りない

• 光ばねがあると $\rightarrow \frac{\omega_{opt}^2}{\gamma(\omega_{opt})} > \frac{4k_B T}{\hbar} \Leftrightarrow \frac{\omega_0^2}{\gamma(\omega_{opt})} > \frac{4k_B T}{\hbar} \left(\frac{\omega_0}{\omega_{opt}} \right)^2$

$\sim (2 / 300)^{-1} = 150$

$\sim (2 / 300)^2 = 4e-5$
(逆数をとると2e4)

150 * 2e4 = 3e6!!
6桁の不足をおぎなった！

具体的に計算してみよう！

• 条件： $\frac{\omega_0^2}{\gamma(\omega_0)} > \frac{4k_B T}{\hbar} \rightarrow \sim 1e-23 * 300 / 1e-34 = 3e13$

$\frac{\omega_0^2}{\gamma(\omega_0)} \rightarrow \sim (2 * \pi * 2)^2 / 6e-6 \sim 3e7$

6桁足りない

• 光ばねがあると $\rightarrow \frac{\omega_{opt}^2}{\gamma(\omega_{opt})} > \frac{4k_B T}{\hbar} \Leftrightarrow \frac{\omega_0^2}{\gamma(\omega_{opt})} > \frac{4k_B T}{\hbar} \left(\frac{\omega_0}{\omega_{opt}} \right)^2$

$\frac{\omega_0^2}{\gamma(\omega_{opt})} \rightarrow \sim (2 / 300)^{-1} = 150$

$\left(\frac{\omega_0}{\omega_{opt}} \right)^2 \rightarrow \sim (2 / 300)^2 = 4e-5$
(逆数とると2e4)

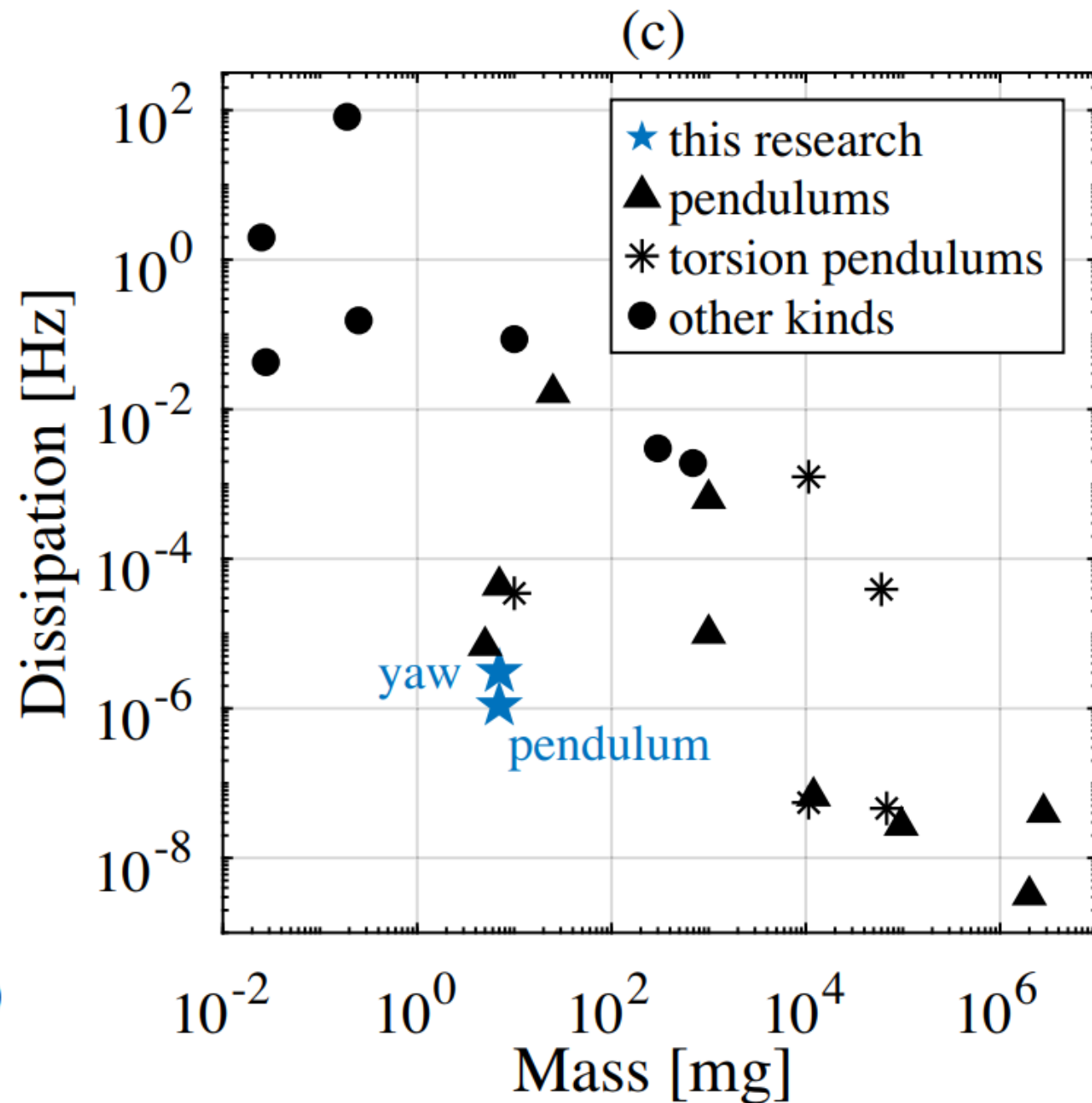
量子計測可能な
振動子！

150 * 2e4 = 3e6!!
6桁の不足をおぎなった！

他の振動子との比較

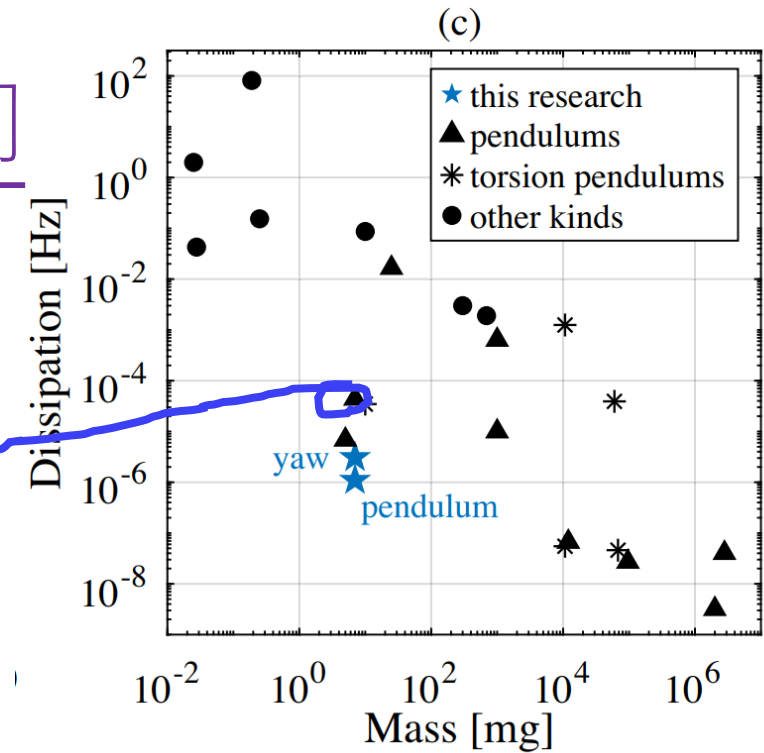
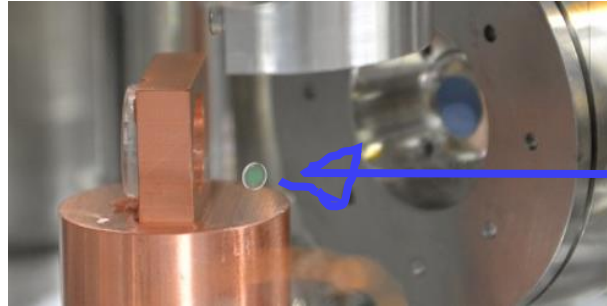
- 様々な振動子：
振り子、ねじれ振り子、
カンチレバー、薄膜、浮上球...

大きなスケールでは振り子が
すごい！



低散逸化に成功、変位計測と制御

- 後半では
精密変位測定
→ 光ばね + フィードバック冷却



- フィードバック冷却
→ 制御でモード温度を冷却する

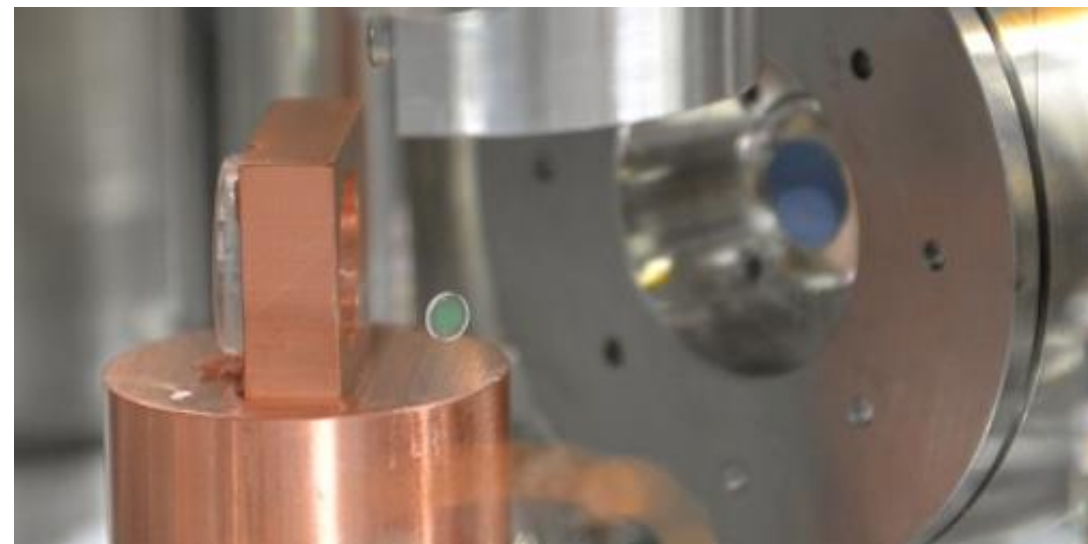
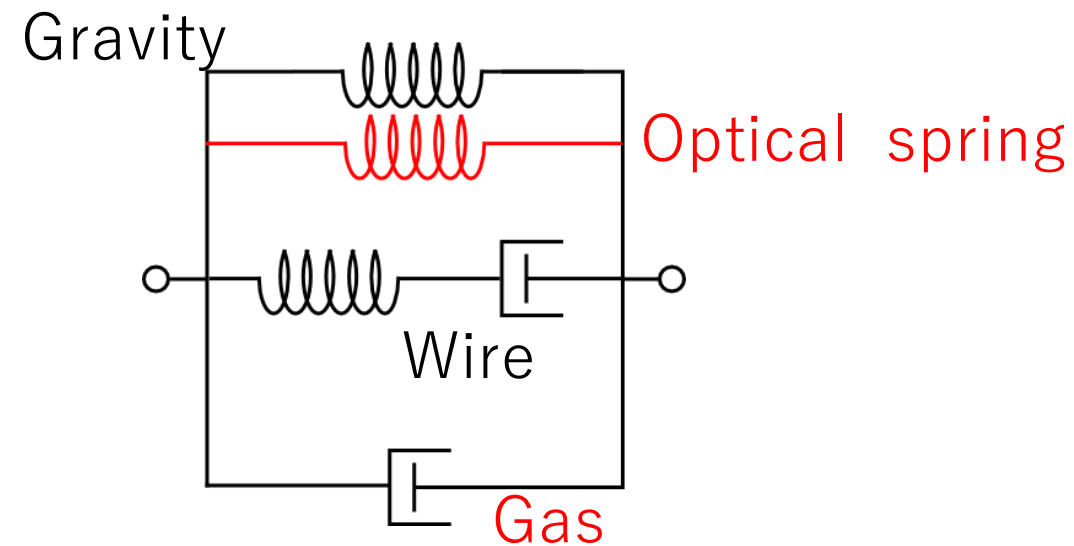
量子推定

- 測定データを因果的に解析し、不確かさを減らす(条件付き確率の制御)

精密変位計測の実現

- 三角共振器（回転の光学トラップ）
 - 光ばね（重心振動の光学トラップ）
 - （PRL2020ではないが）低散逸振動子
- 精密変位が**原理的**に可能。**技術的**には？

Optical dilutionによる
さらなるQ値の増強(雑音の低減)↓



PHYSICAL REVIEW LETTERS **122**, 071101 (2019)

Featured in Physics

Demonstration of Displacement Sensing of a mg-Scale Pendulum for mm- and mg-Scale Gravity Measurements

Nobuyuki Matsumoto,^{1,2,3,*} Seth B. Cataño-Lopez,² Masakazu Sugawara,² Seiya Suzuki,²
Naofumi Abe,² Kentaro Komori,⁴ Yuta Michimura,⁴ Yoichi Aso,^{5,6} and Keiichi Edamatsu²

理想的計測に向けた実験構成

真空中（“**all-in-vac operation**”, 10^{-5} Pa未満）

多段防振・光源安定化システム

信号取得系・調節機構

→測定精度向上

大気中

単一周波数光源(1064 nm/500 mW)

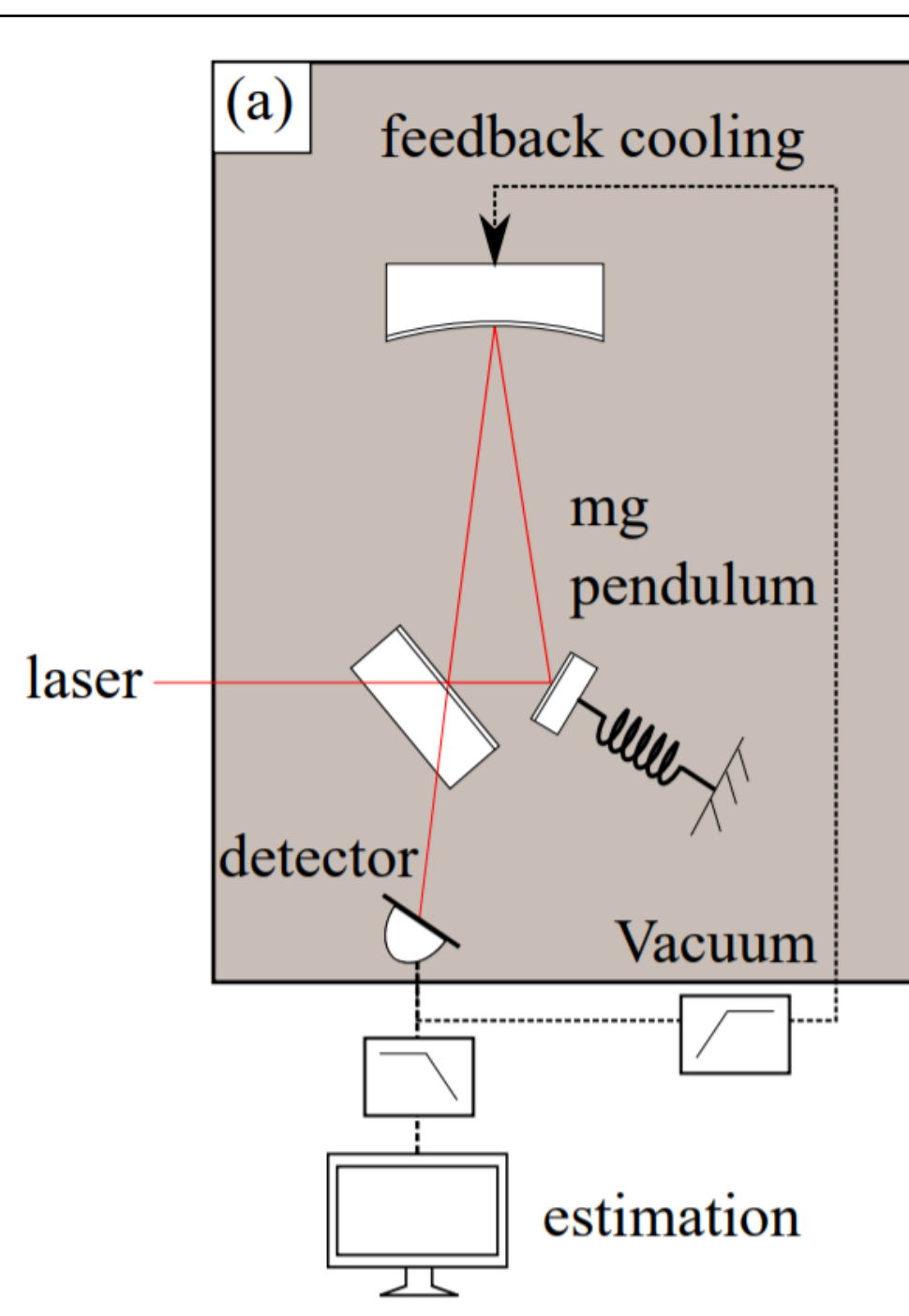
光学変調器・電気信号のフィルター

データ解析

開発期間（予算獲得・設計・発注/納品・構築・脱ガス評価…）

2.5年（2015～2017年）

実験期間（高精度化）：4か月



Setup

total mass ~ 120 kg
main platform ~ 20 kg
damper ~ 10 kg × 2



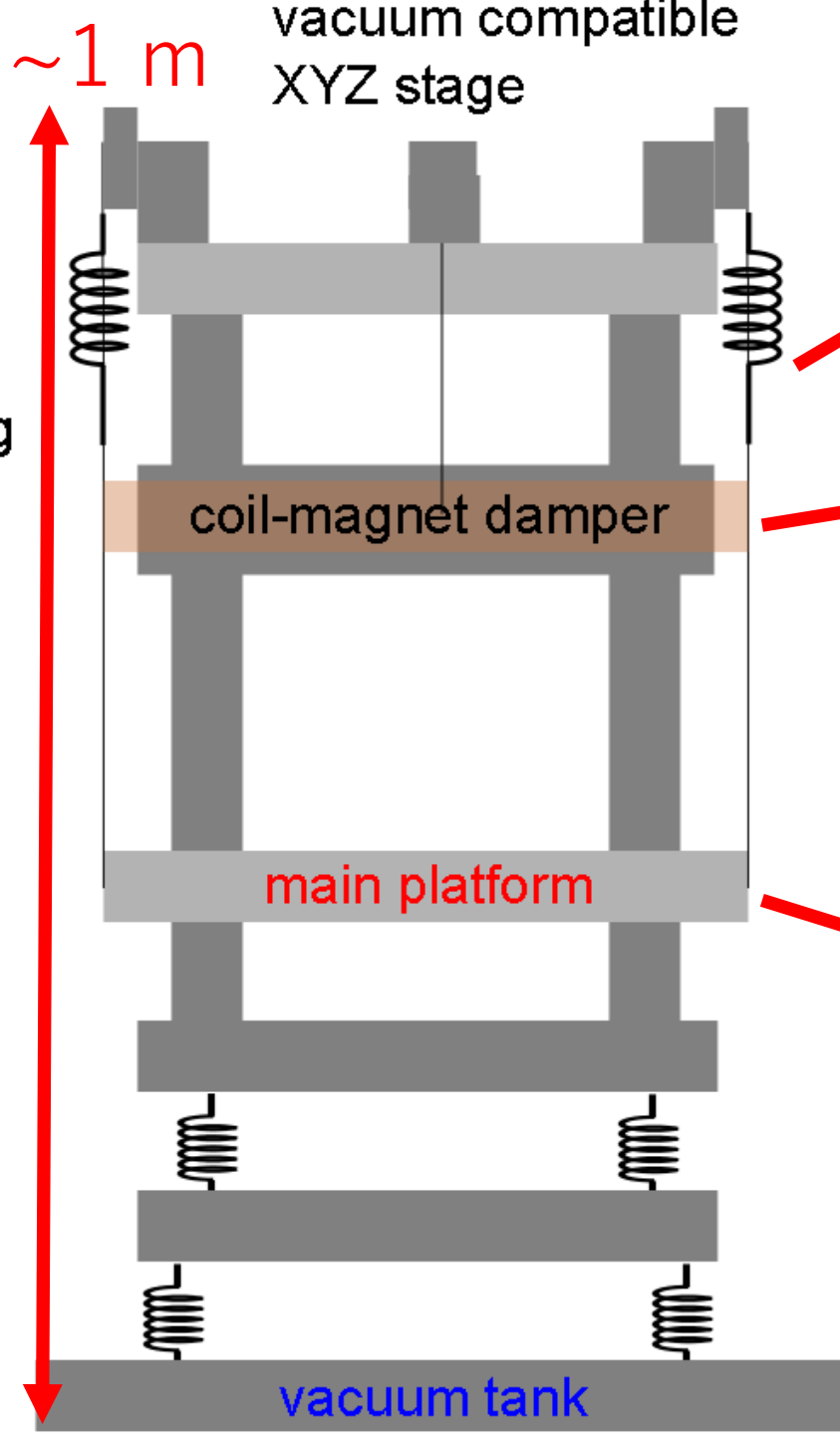
copper



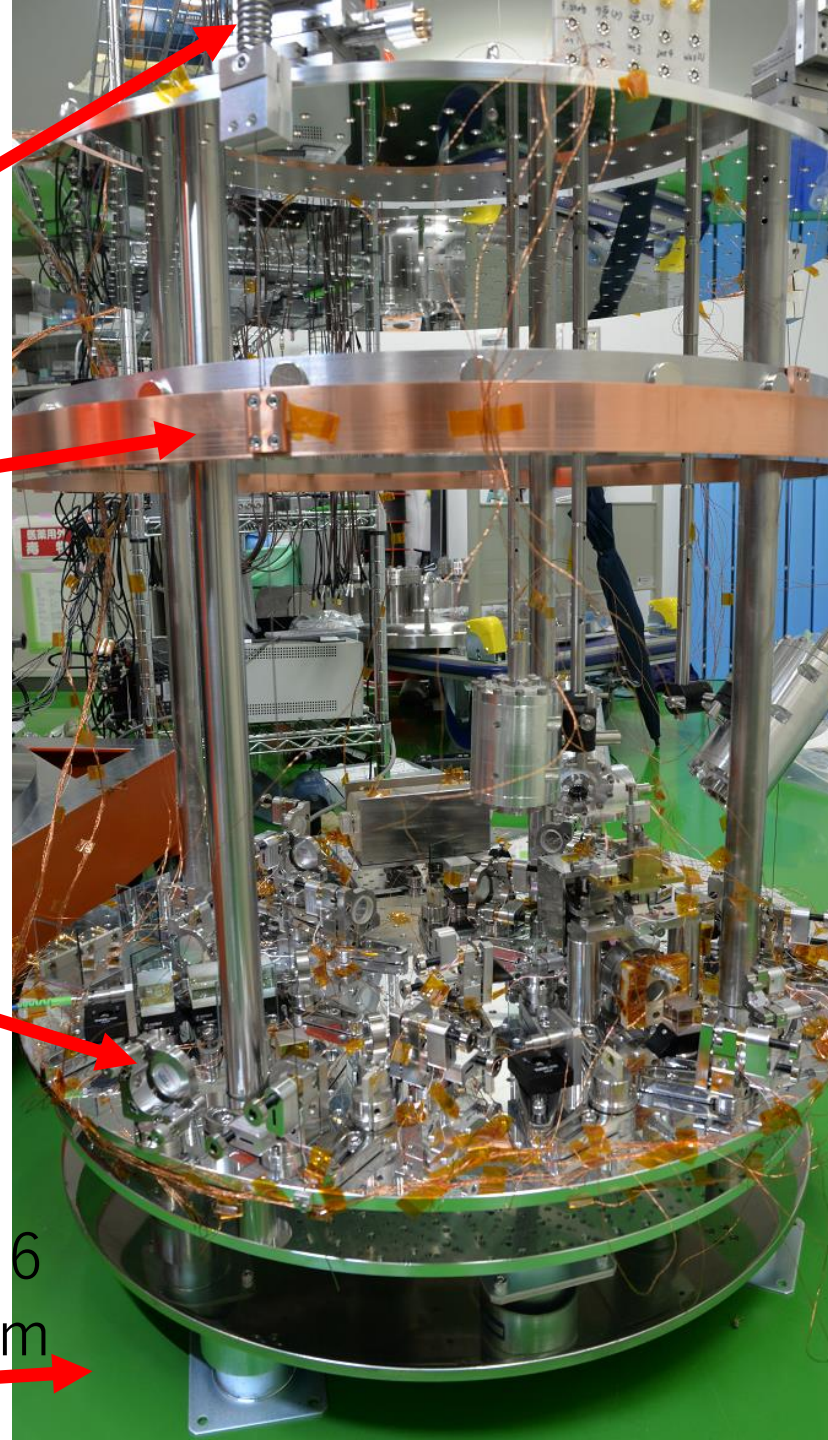
aluminum

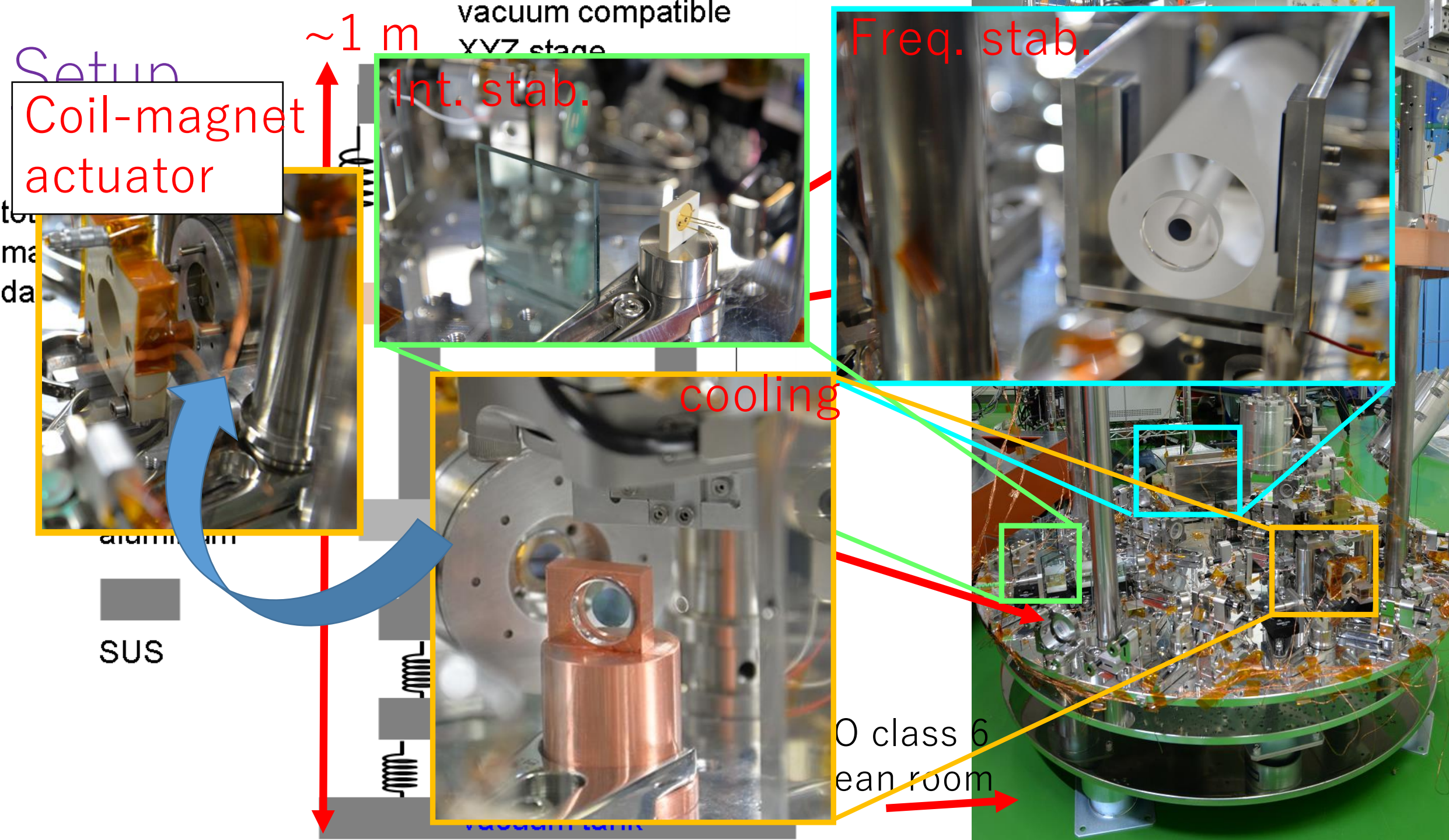


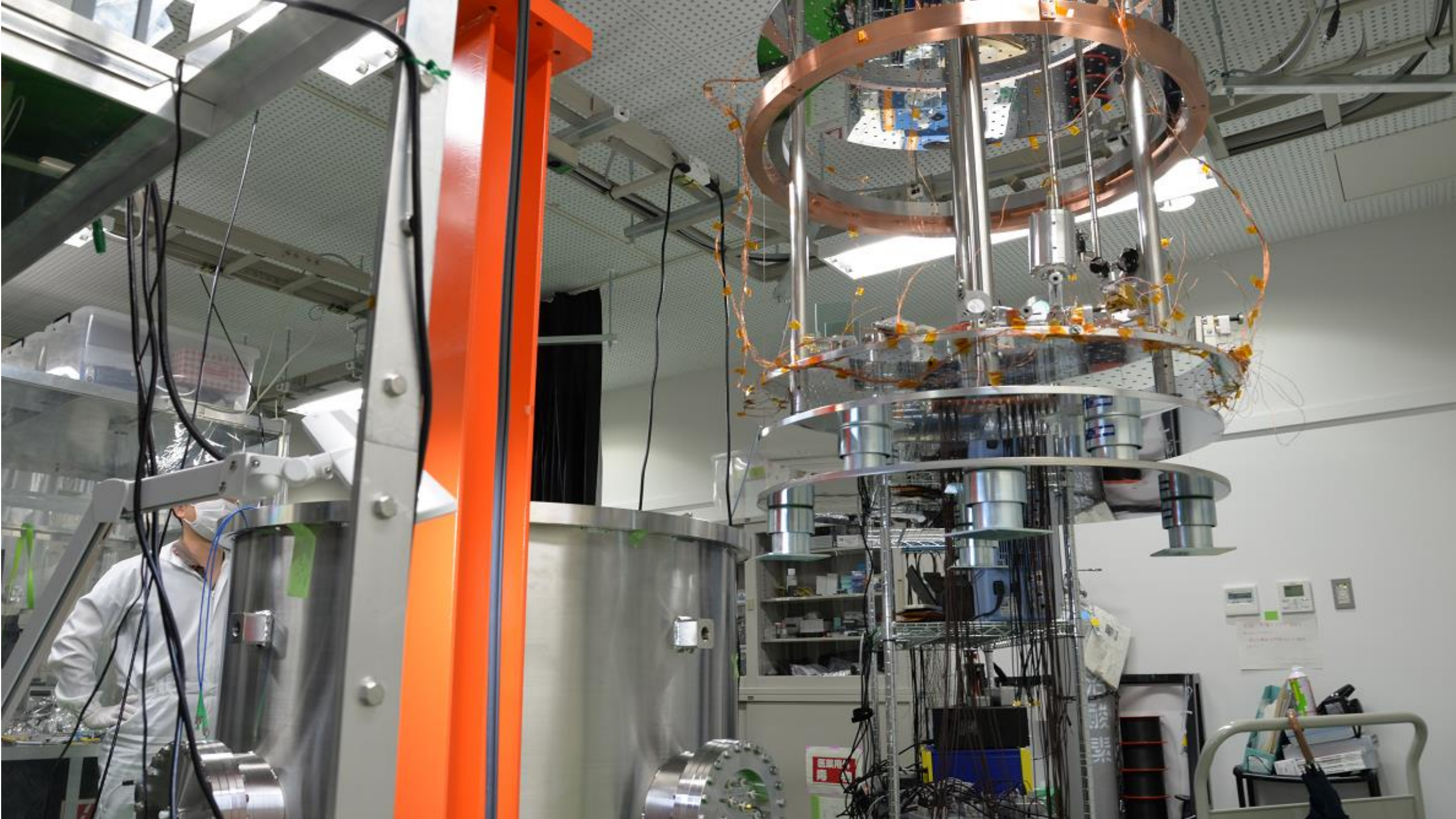
SUS



ISO class 6
Clean room



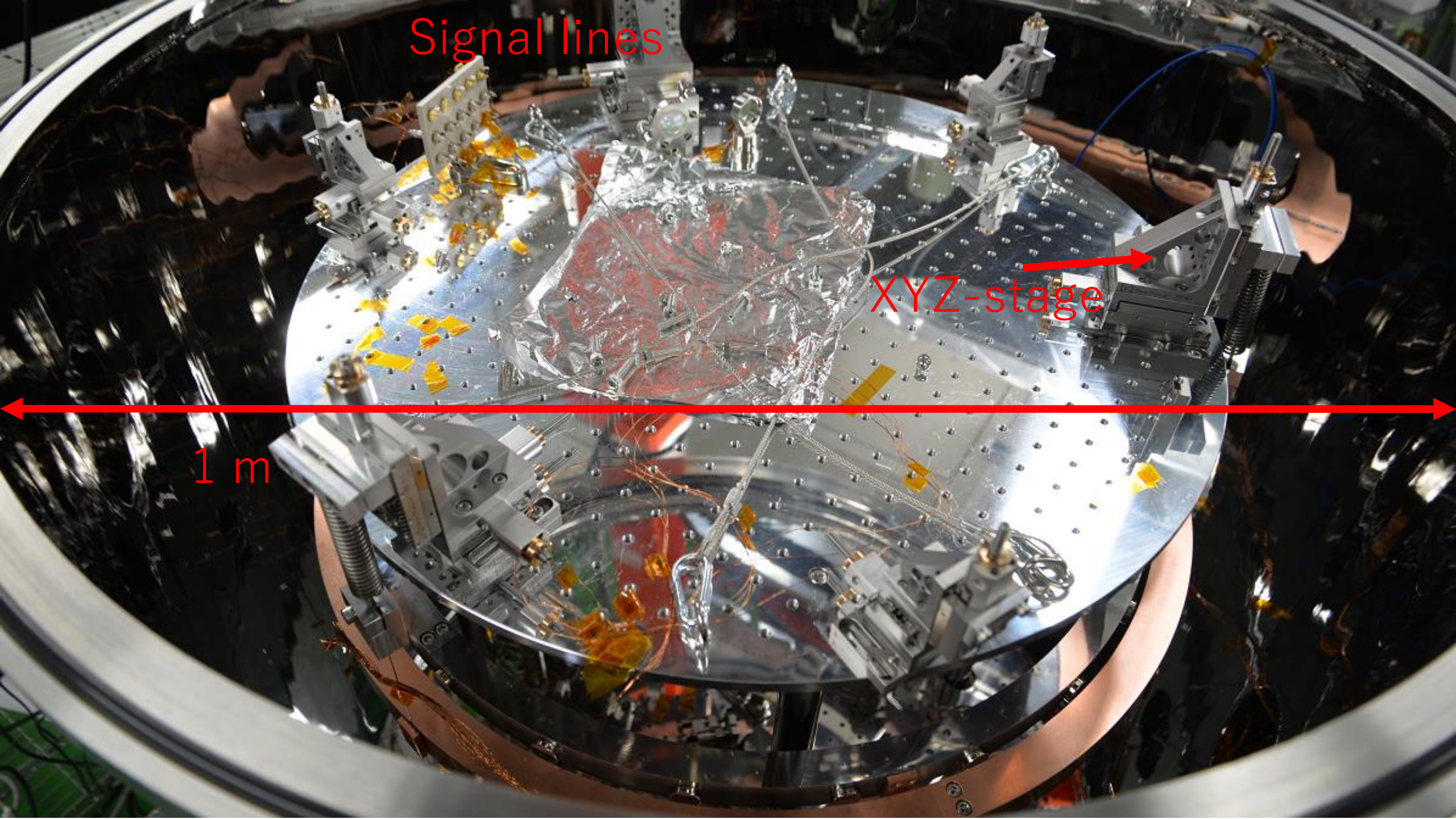


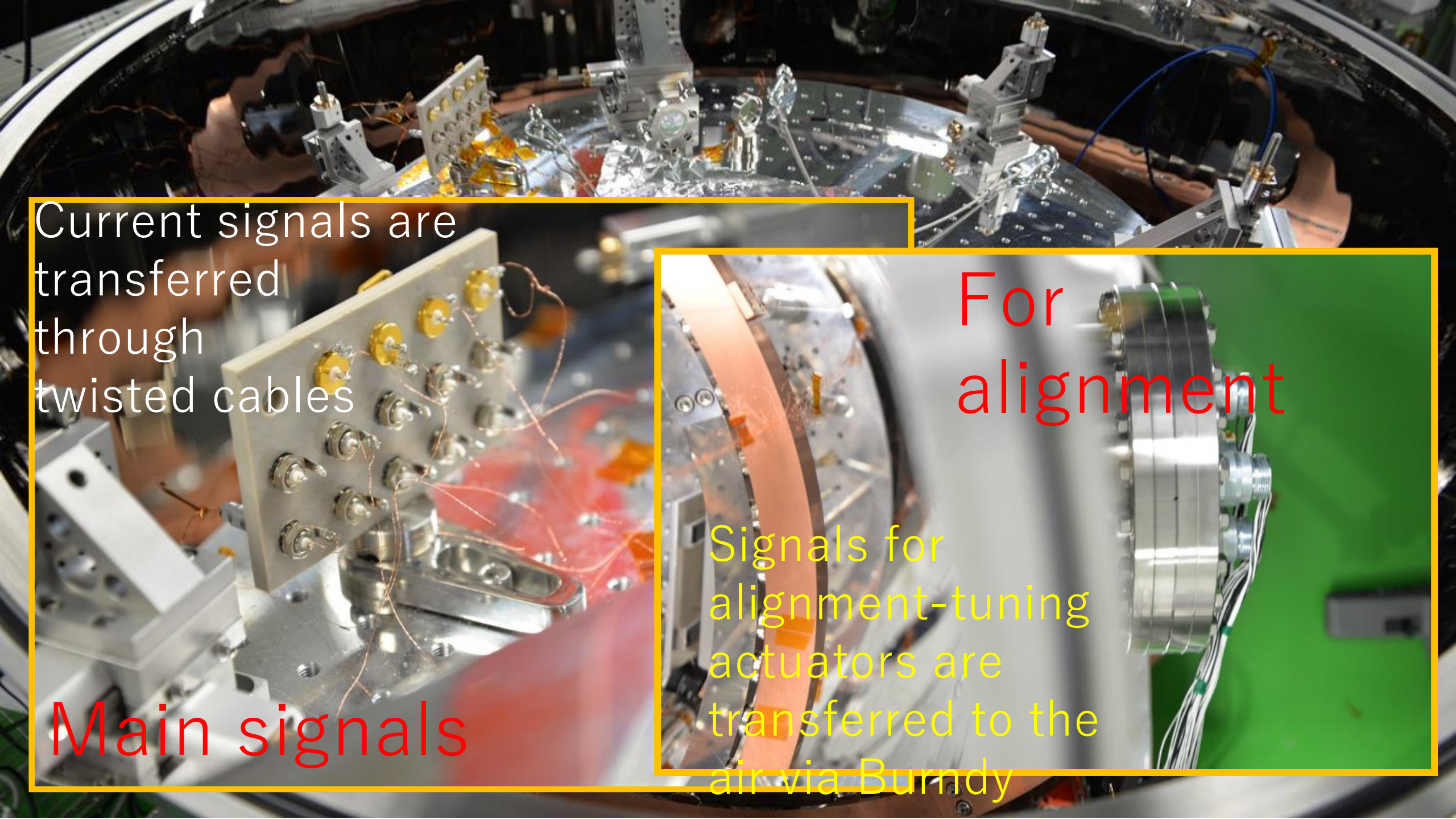


Signal lines

XYZ-stage

1 m





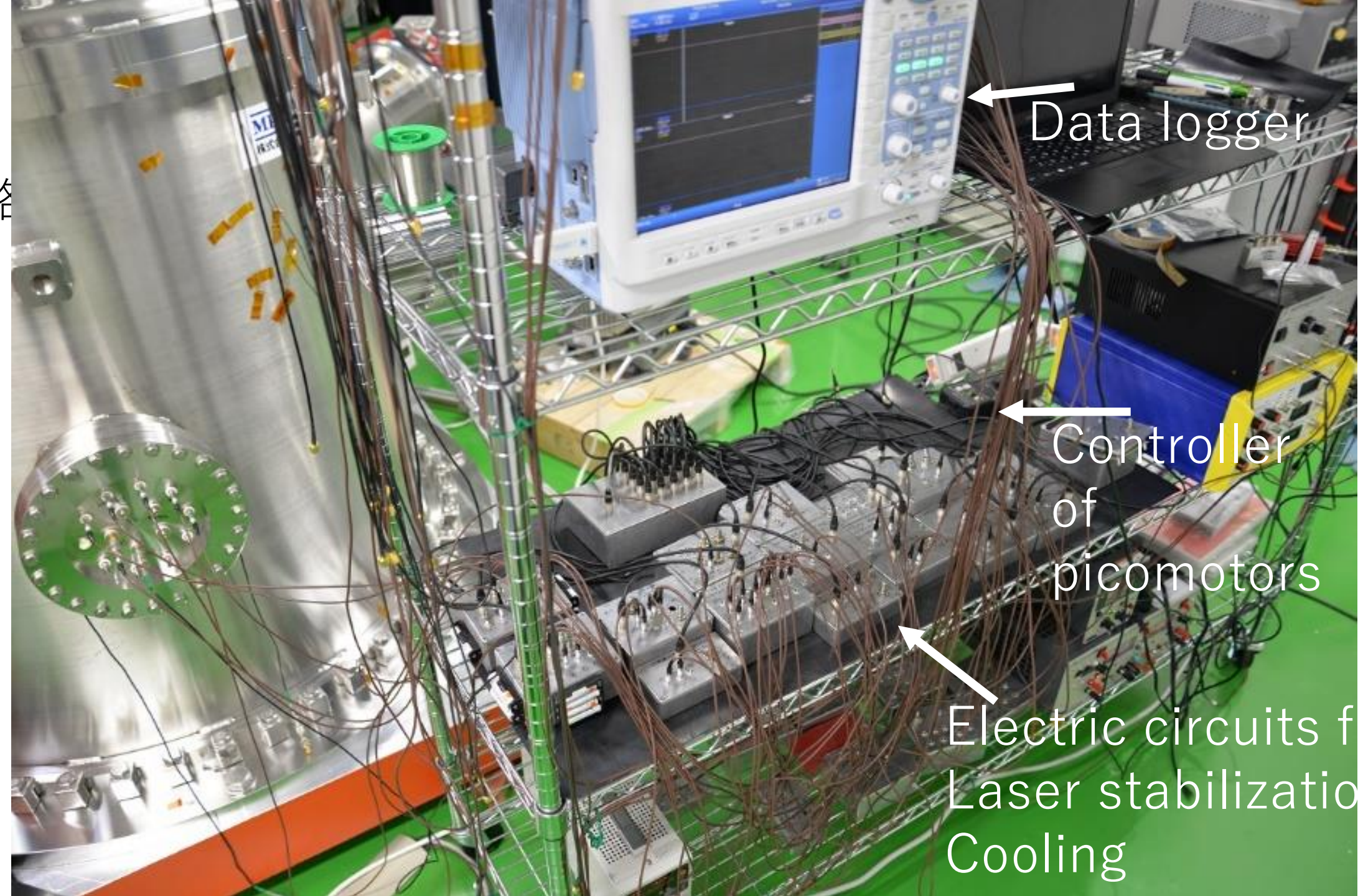
Current signals are
transferred
through
twisted cables

Main signals

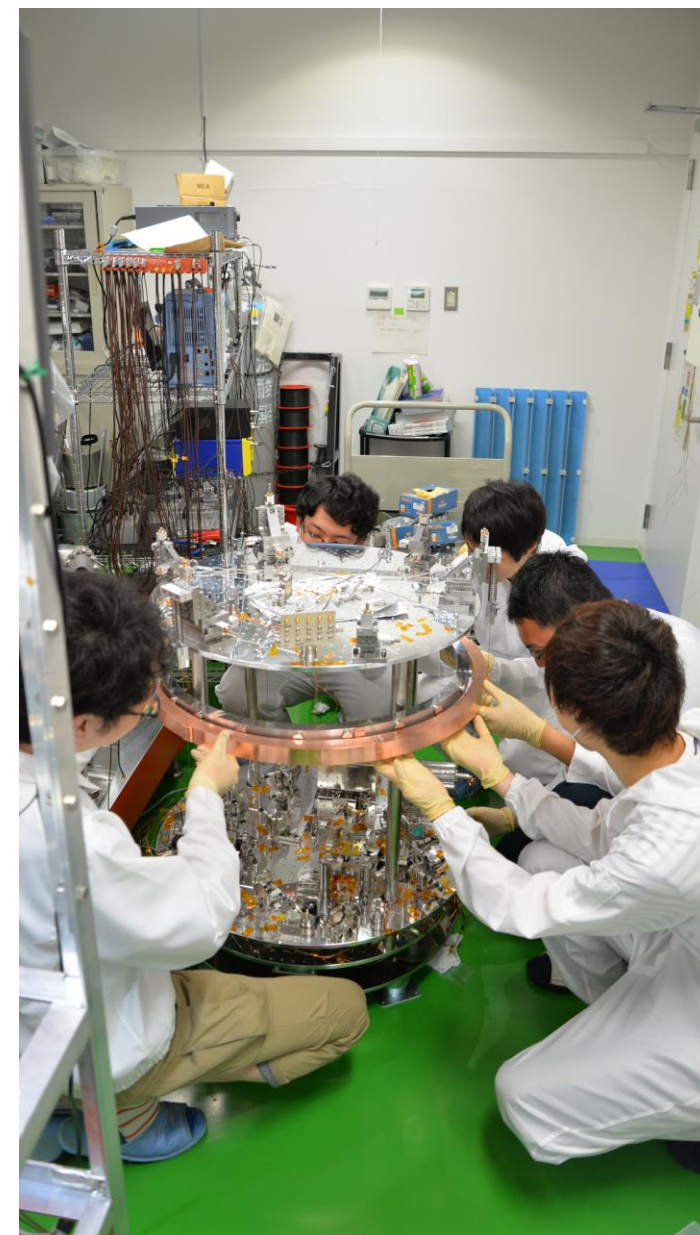
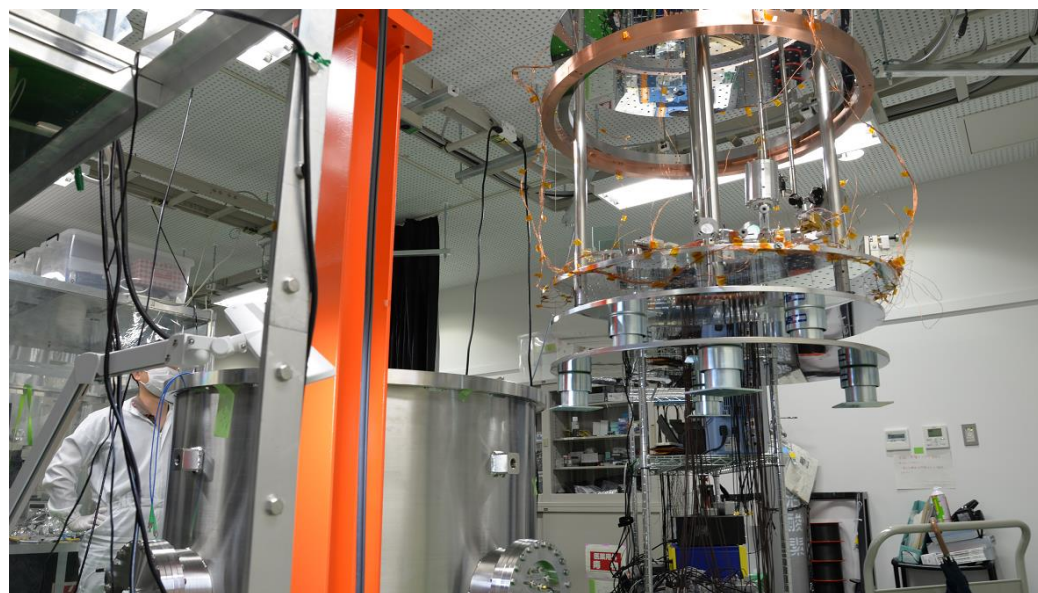
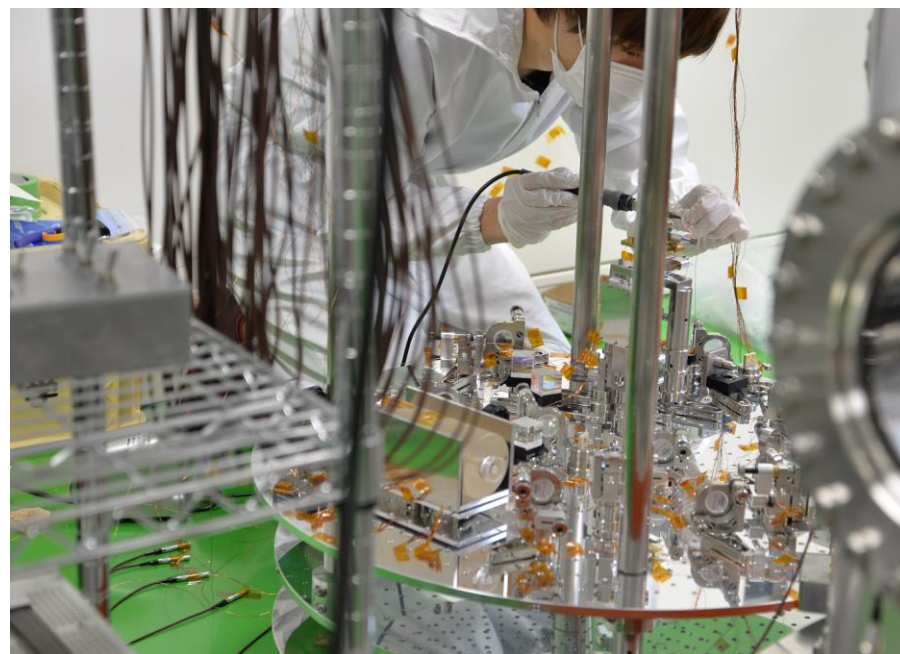
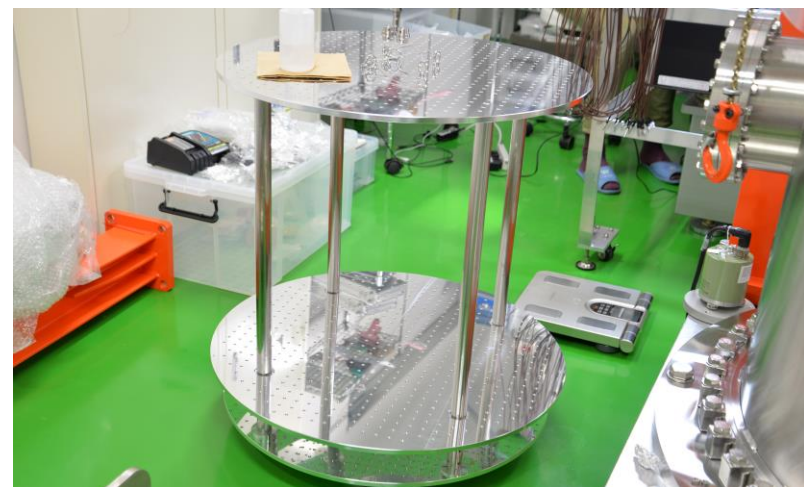
For
alignment

Signals for
alignment-tuning
actuators are
transferred to the
air via Burndy

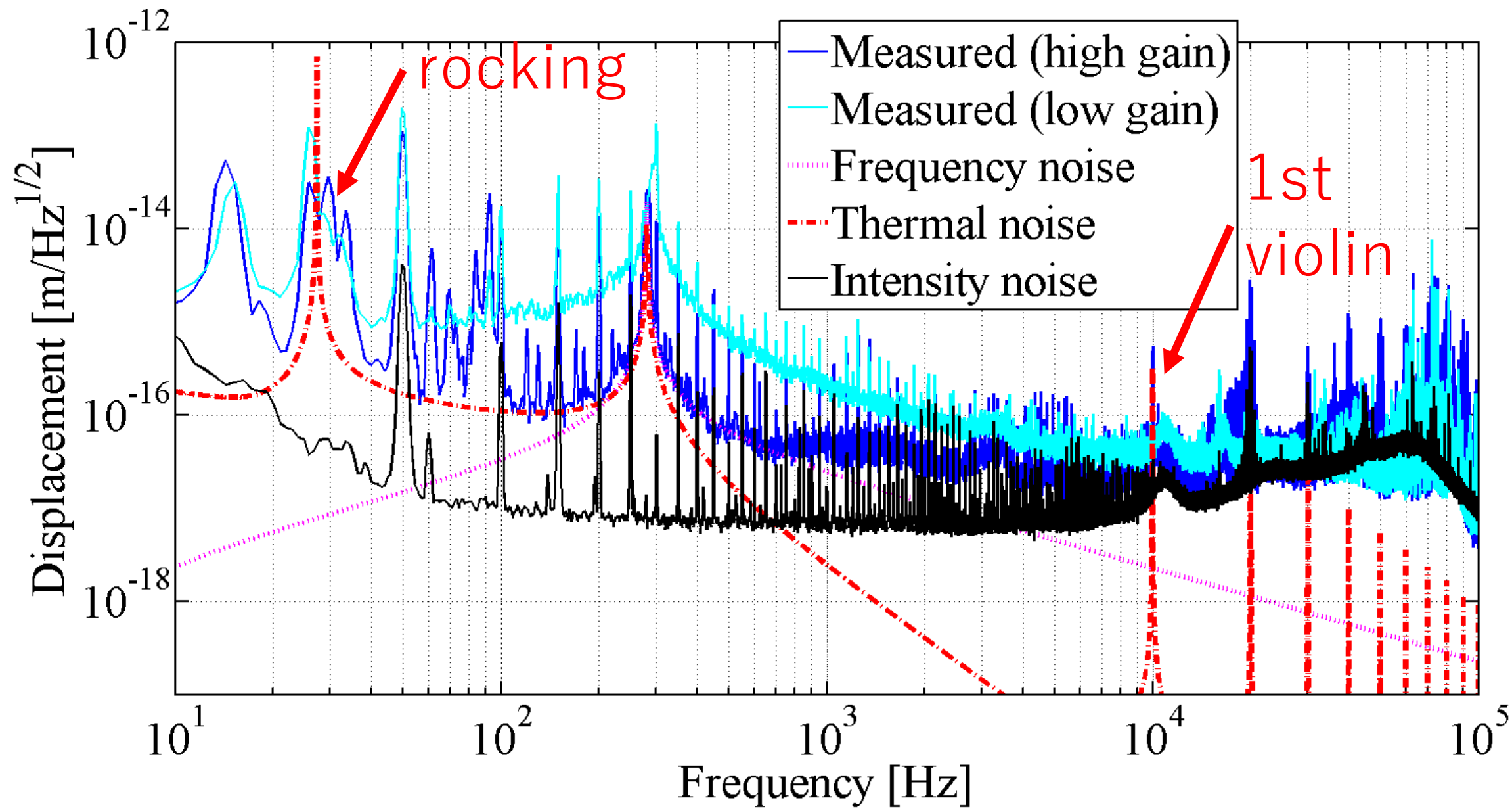
• 回路



製作過程

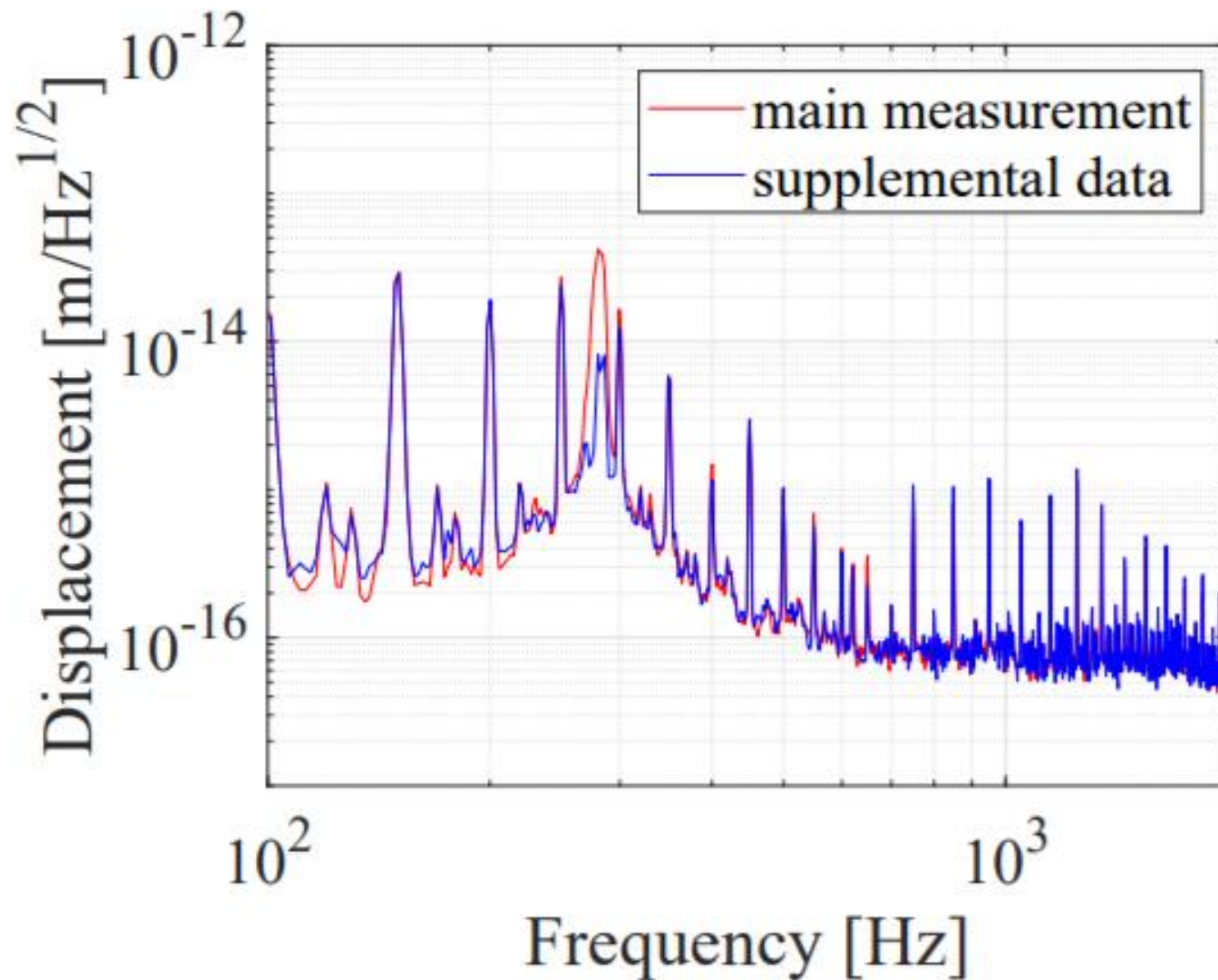


光学トラップされた冷えた振り子 (10 mK)



さらにフィードバック冷却すると

- 11 mK
→ 420 μ K



量子状態推定

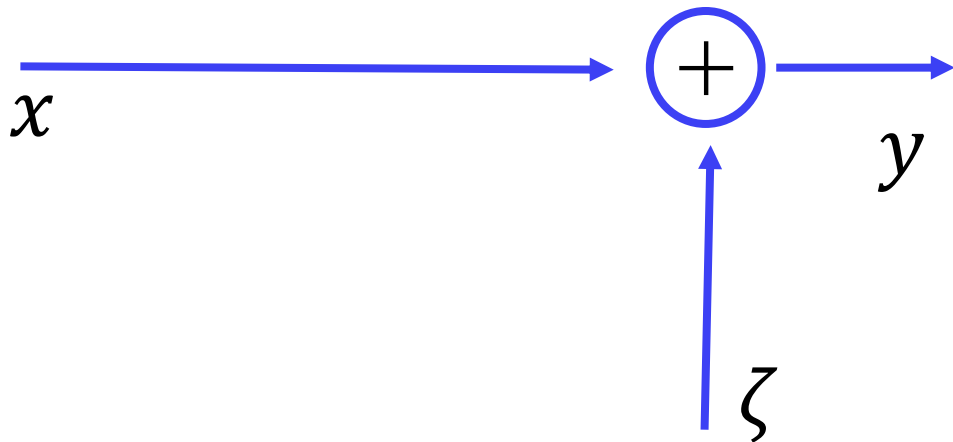
- 10 mK, 400 μ K程度まで冷えた振動の時系列データ
+
 - 因果的な量子推定アルゴリズム（量子ウィーナーフィルタ）
- 測定データ中の不確かさを低減（条件付き確率分布の制御）
量子推定！

フィードバック制御と異なり

- 制御の安定性を気にする必要なし
 - モデルのパラメータをじっくりと精査可能
- フィードバック制御へ移行する前の準備

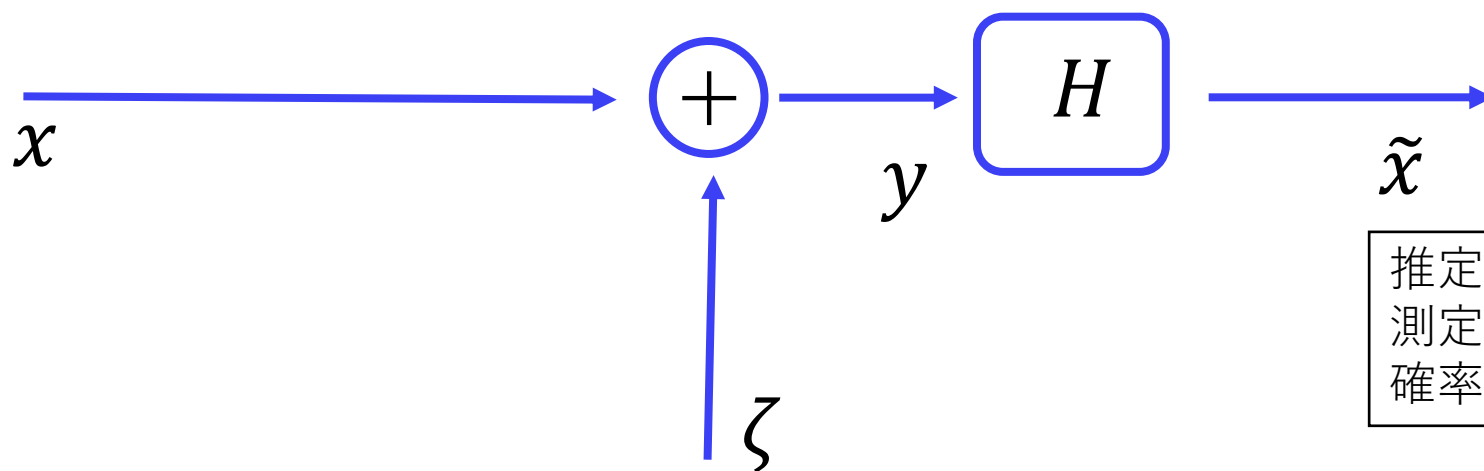
不規則信号の推定

- 目的信号 x ：確率過程
- 出力： $y = x + \zeta$



不規則信号の推定

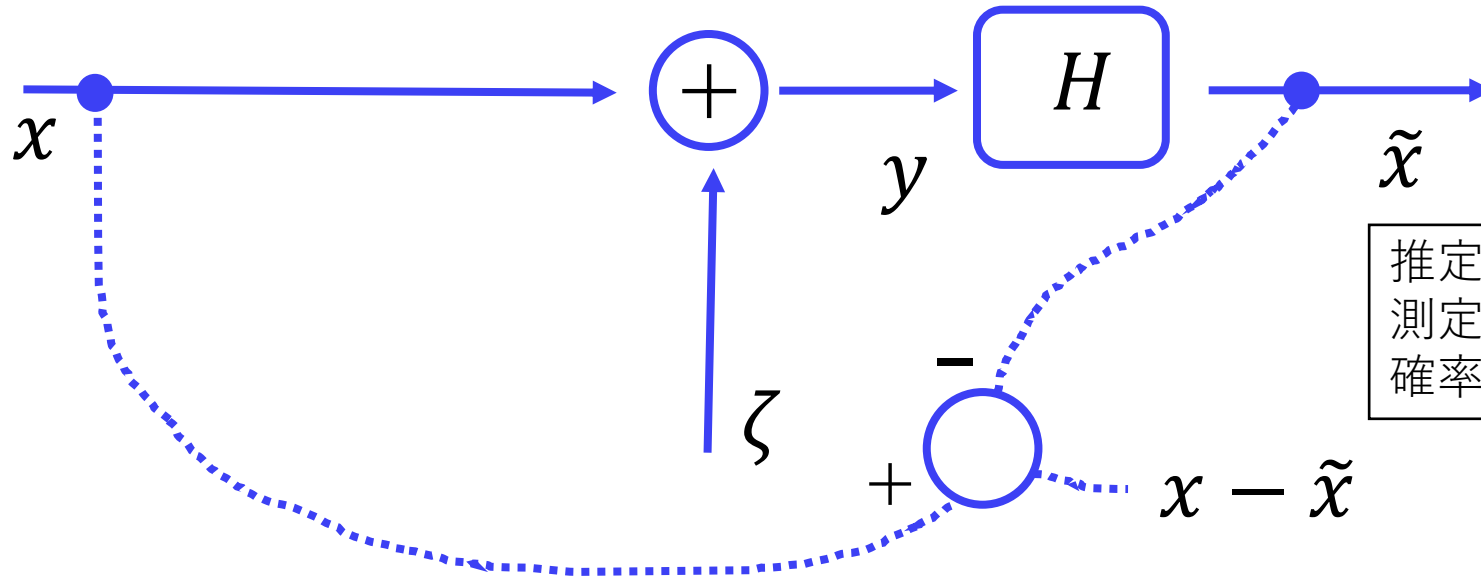
- 目的信号 x ：確率過程
- 出力： $y = x + \zeta$



推定値：
測定結果から条件つけられた
確率変数（条件付き確率）

不規則信号の推定

- 目的信号 x ：確率過程
- 出力： $y = x + \zeta$



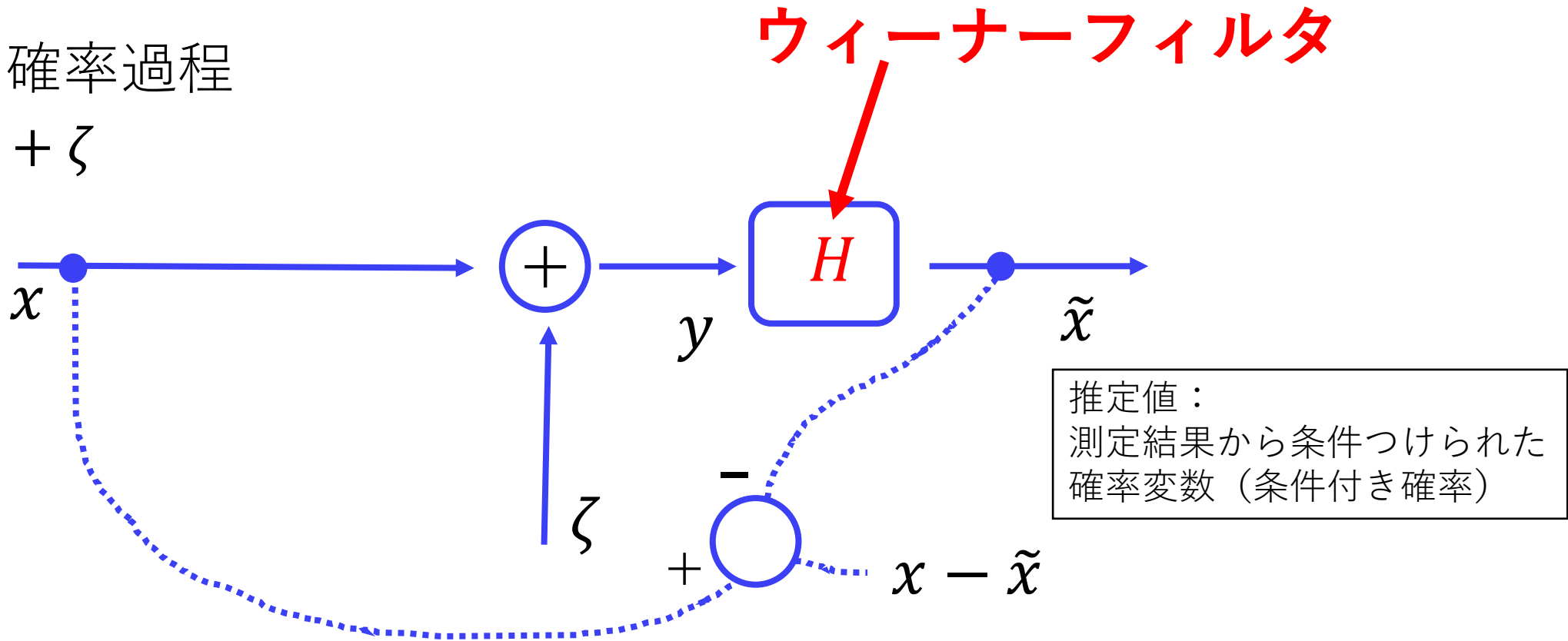
推定値：
測定結果から条件つけられた
確率変数（条件付き確率）

- 目標： $\langle (x - \tilde{x})^2 \rangle$ を最小に

不規則信号の推定

信号が既知のとき（例えば重力波）はマッチドフィルタ

- 目的信号 x ：確率過程
- 出力： $y = x + \zeta$



知識の中（測定データ中）の不確かさ

- 目標： $\langle (x - \tilde{x})^2 \rangle$ を最小に

不規則信号の推定

- 目的信号 x ：確率過程→分散は σ_x^2
- 出力： $y = x + \zeta$
- 推定値： $\tilde{x} = Hy$
- 雑音： ζ →分散は σ_ζ^2
- 目標： $D = \langle (x - \tilde{x})^2 \rangle$ を最小に

不規則信号の推定

- 目的信号 x ：確率過程→分散は σ_x^2
- 出力： $y = x + \zeta$
- 推定値： $\tilde{x} = Hy$
- 雑音： ζ →分散は σ_ζ^2

- 目標： $D = \langle (x - \tilde{x})^2 \rangle$ を最小に

信号と雑音は無相関と仮定
(古典的)

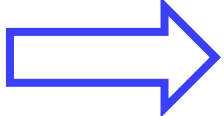
- $D = \langle (x - Hy)^2 \rangle = \langle (x - H(x + \zeta))^2 \rangle = (1 - H)^2 \langle x^2 \rangle + H^2 \langle \zeta^2 \rangle$

不規則信号の推定

- 目的信号 x ：確率過程→分散は σ_x^2
- 出力： $y = x + \zeta$
- 推定値： $\tilde{x} = Hy$
- 雑音： ζ →分散は σ_ζ^2

- 目標： $D = \langle (x - \tilde{x})^2 \rangle$ を最小に

信号と雑音は無相関と仮定
(古典的)

- $D = \langle (x - Hy)^2 \rangle = \langle (x - H(x + \zeta))^2 \rangle = (1 - H)^2 \langle x^2 \rangle + H^2 \langle \zeta^2 \rangle$
- $\frac{dD}{dH} = 0$ から $H = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_\zeta^2}$  バンドパスフィルタみたいなもの

不規則信号の推定

- 目的信号 x ：確率過程→分散は σ_x^2
- 出力： $y = x + \zeta$
- 推定値： $\tilde{x} = Hy$
- 雑音： ζ →分散は σ_ζ^2

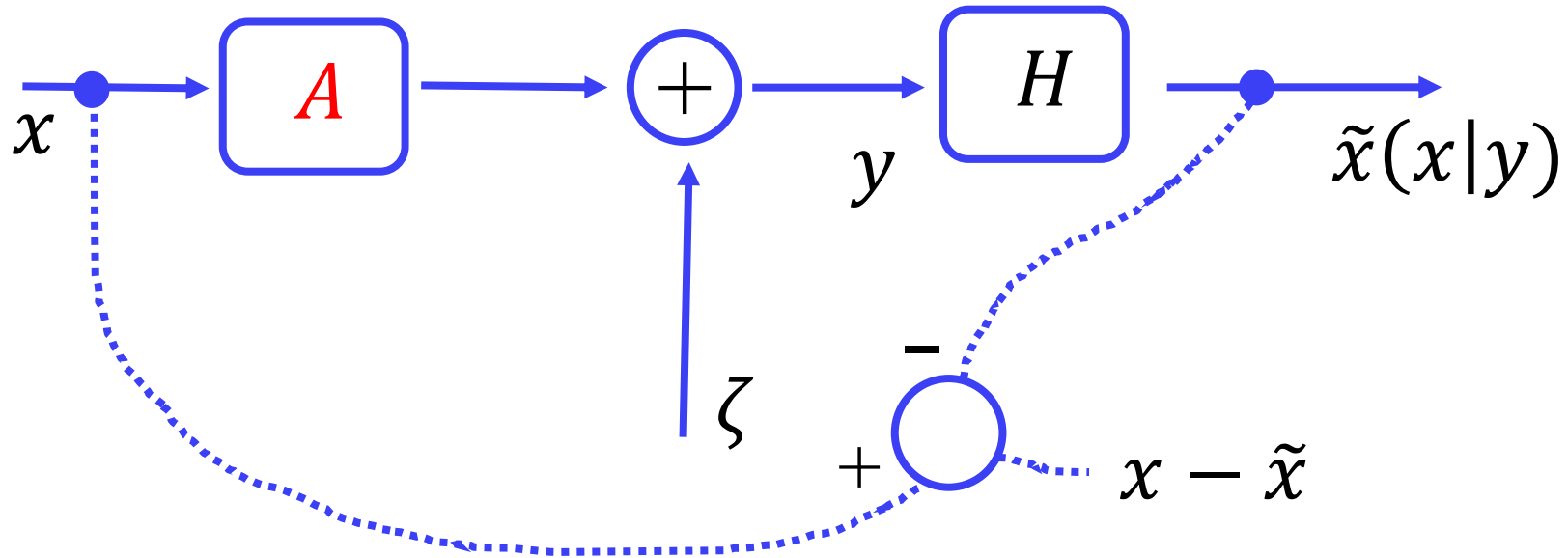
- 目標： $D = \langle (x - \tilde{x})^2 \rangle$ を最小に

信号と雑音は無相関と仮定
(古典的)

- $D = \langle (x - Hy)^2 \rangle = \langle (x - H(x + \zeta))^2 \rangle = (1 - H)^2 \langle x^2 \rangle + H^2 \langle \zeta^2 \rangle$
- $\frac{dD}{dH} = 0$ から $H = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_\zeta^2} \rightarrow 1$ (SN比高いとき)

不規則信号の推定

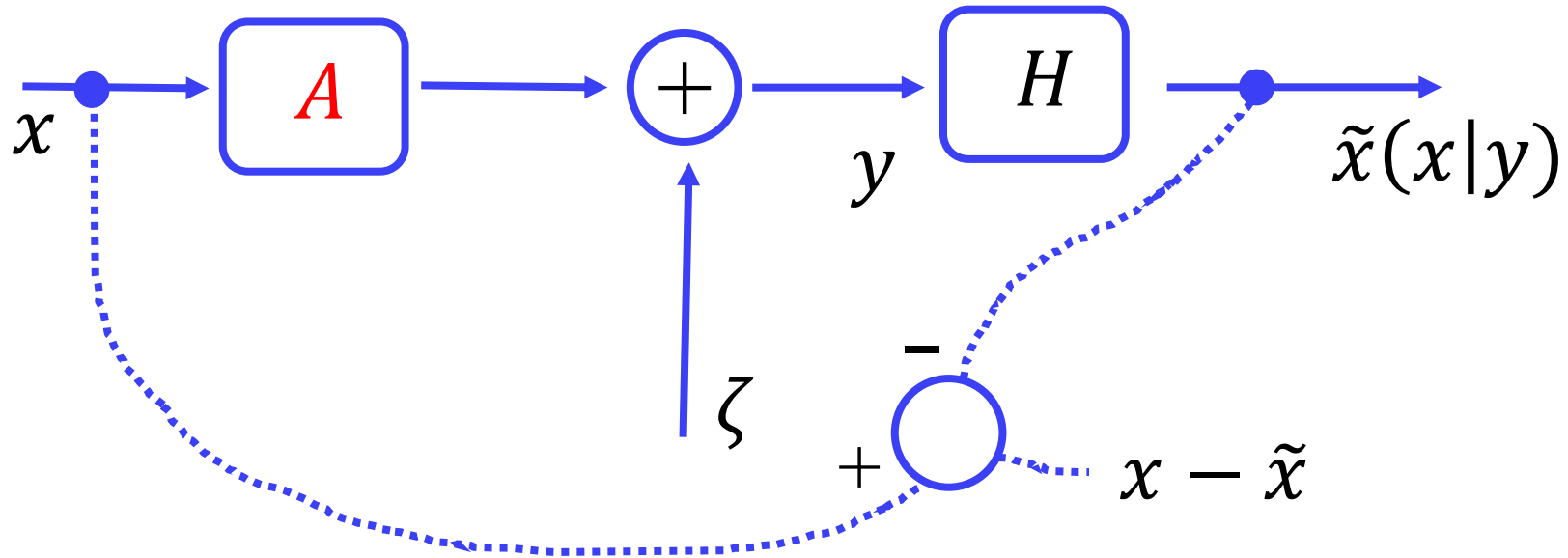
- 目的信号 x ：確率過程
- 出力： $y = Ax + \zeta$



- 目標： $\langle (x - \tilde{x})^2 \rangle$ を最小に

不規則信号の推定

- 目的信号 x ：確率過程
- 出力： $y = Ax + \zeta$

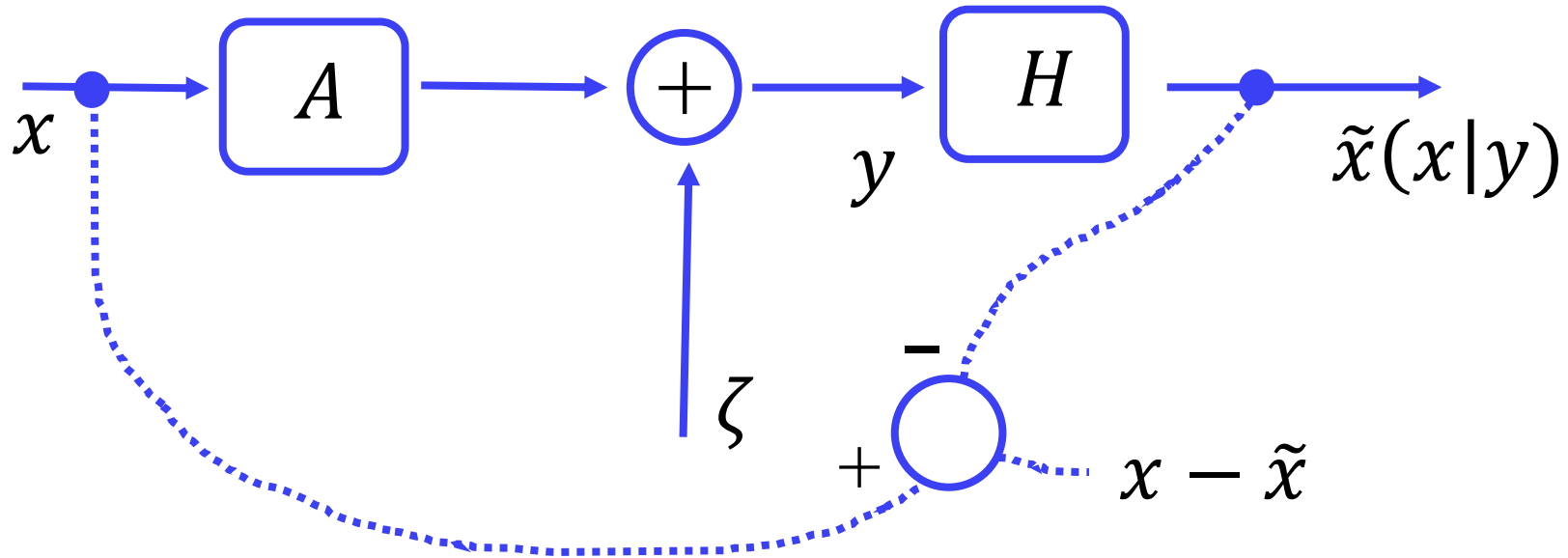


- 目標： $\langle (x - \tilde{x})^2 \rangle$ を最小に

$$H = \frac{A^* P_{xx}}{|A|^2 P_{xx} + P_{\zeta\zeta}}$$

不規則信号の推定

- 目的信号 x ：確率過程
- 出力： $y = Ax + \zeta$

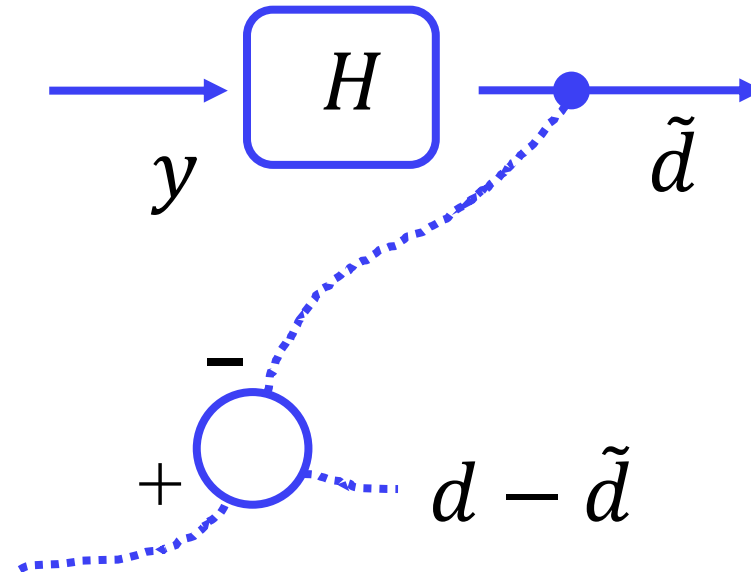


- 目標： $\langle (x - \tilde{x})^2 \rangle$ を最小に

$$H = \frac{A^* P_{xx}}{|A|^2 P_{xx} + P_{\zeta\zeta}} \Rightarrow \frac{1}{A}$$

少しだけ一般化

- 目的信号を一般的に d とすると
- $H = \frac{S_{yd}}{S_{yy}} = \frac{\langle y(\omega)d^*(\omega) \rangle}{S_{yy}}$



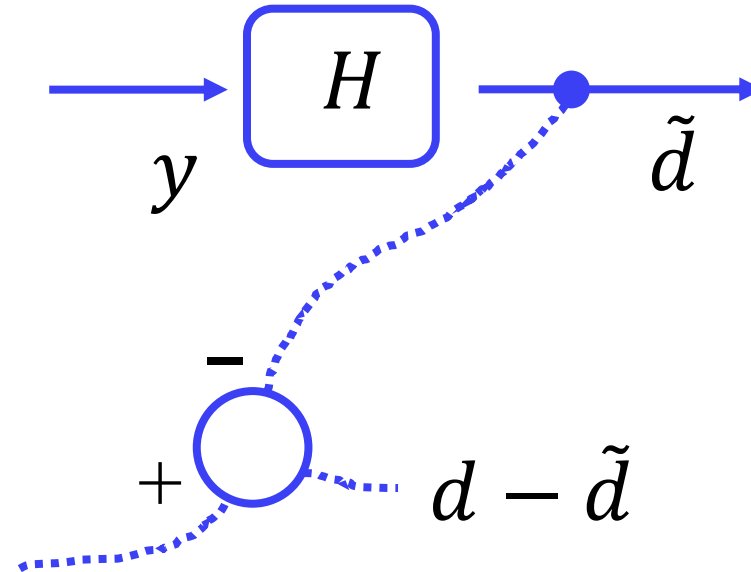
少しだけ一般化

- 目的信号を一般的に d とすると

- $$H = \frac{S_{yd}}{S_{yy}} = \frac{\langle y(\omega)d^*(\omega) \rangle}{S_{yy}}$$

- 目的信号が x のとき

- $$H = \frac{A^* P_{xx}}{|A|^2 P_{xx} + P_{\zeta\zeta}}$$



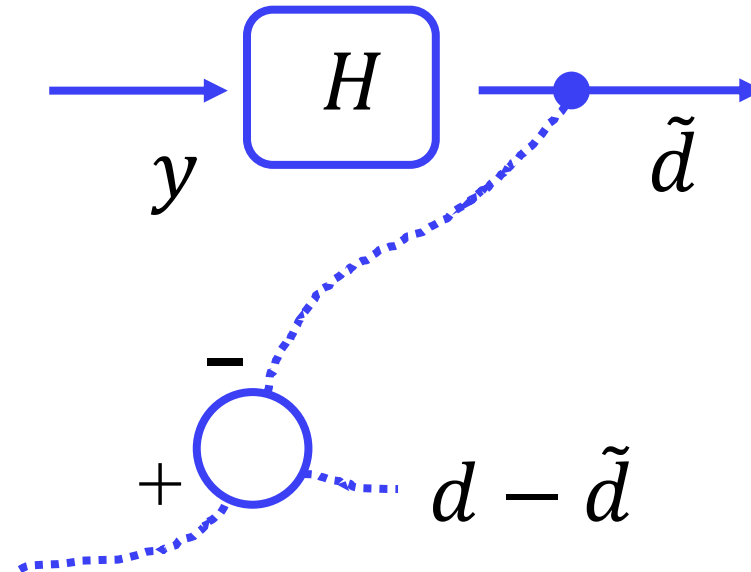
少しだけ一般化

- 目的信号を一般的に d とすると

- $H = \frac{S_{yd}}{S_{yy}} = \frac{\langle y(\omega) \boxed{d^*(\omega)} \rangle}{S_{yy}}$

- 目的信号が x のとき

- $H = \frac{\boxed{A^*} P_{xx}}{|A|^2 P_{xx} + P_{\zeta\zeta}}$



周波数領域で複素共役

→時間領域で時間軸が逆転

→式のうえでは因果律に反することがありえる

システムの応答関数と因果性

因果的な応答

$$\bullet x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t - \tau) F d\tau = \int_{-\infty}^t \chi(t - \tau) F d\tau, \chi(t) = 0 \quad (t < 0)$$

数学的には、応答関数がラプラス空間で左反平面に極と零点を持てばよい

システムの応答関数と因果性

因果的な応答

- $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t - \tau) F d\tau = \int_{-\infty}^t \chi(t - \tau) F d\tau, \chi(t) = 0 \ (t < 0)$

数学的には、応答関数がラプラス空間で左反平面に極と零点を持てばよい

例

- $m\ddot{x} = -kx - \Gamma\dot{x} + F$

- $\chi(\omega) = \frac{x}{F} = \frac{1}{m} \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma} = \frac{1}{m} \frac{1}{s^2 + \Gamma s + \Omega^2}, s = -i\omega$

- $s^2 + \Gamma s + \Omega^2 = 0$ となるのは $s \simeq -\frac{\Gamma}{2} \pm i\Omega$

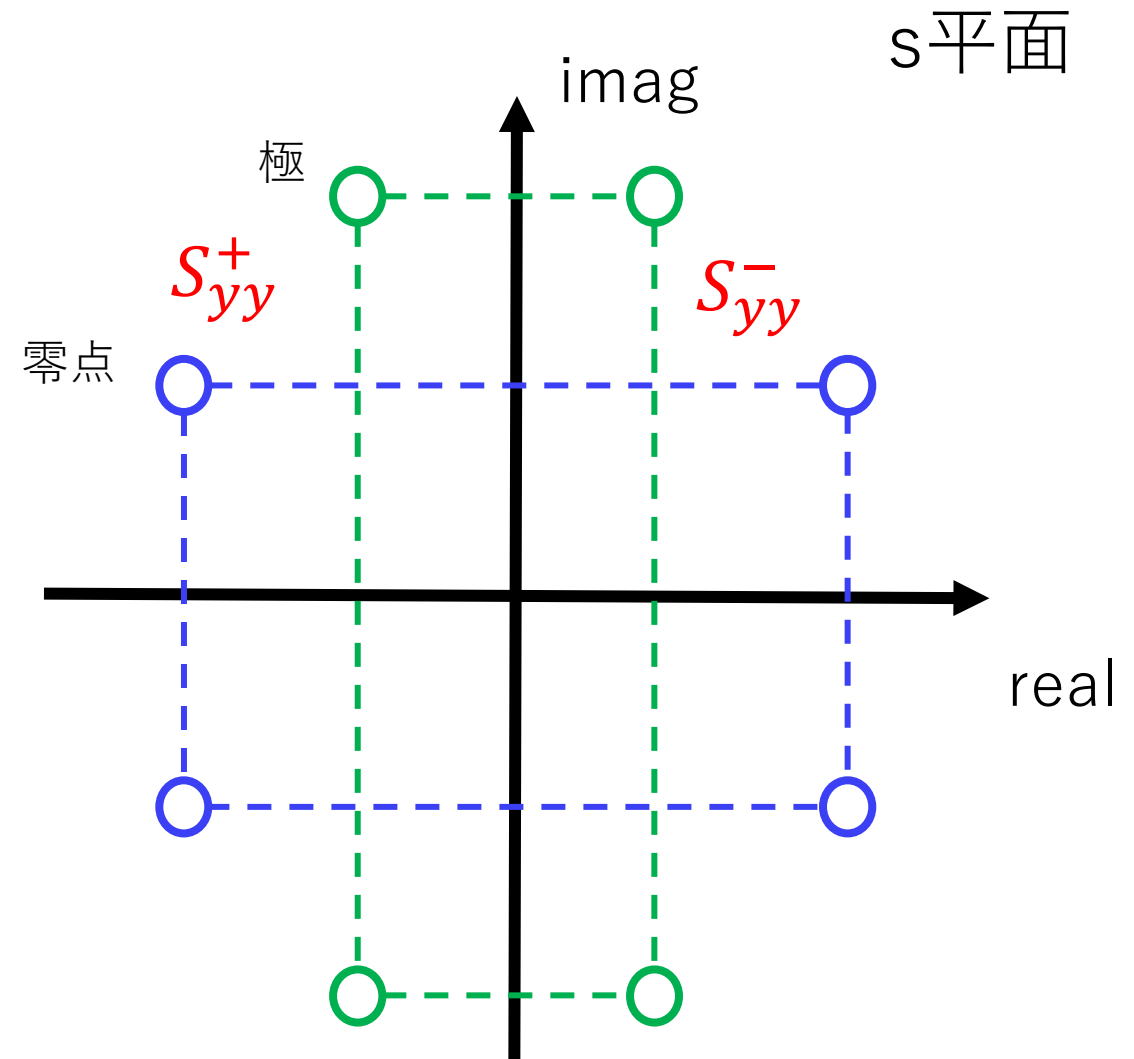
→極が左反平面

因果的なウィーナーフィルタ

- 非因果的な場合
- $H = \frac{S_{yd}}{S_{yy}} = \frac{\langle y(\omega)d^*(\omega) \rangle}{S_{yy}}$

因果的なウィーナーフィルタ

- 非因果的な場合
- $H = \frac{S_{yd}}{S_{yy}} = \frac{\langle y(\omega)d^*(\omega) \rangle}{S_{yy}}$
- $S_{yy} = S_{yy}^+ S_{yy}^-$



因果的なウィーナーフィルタ

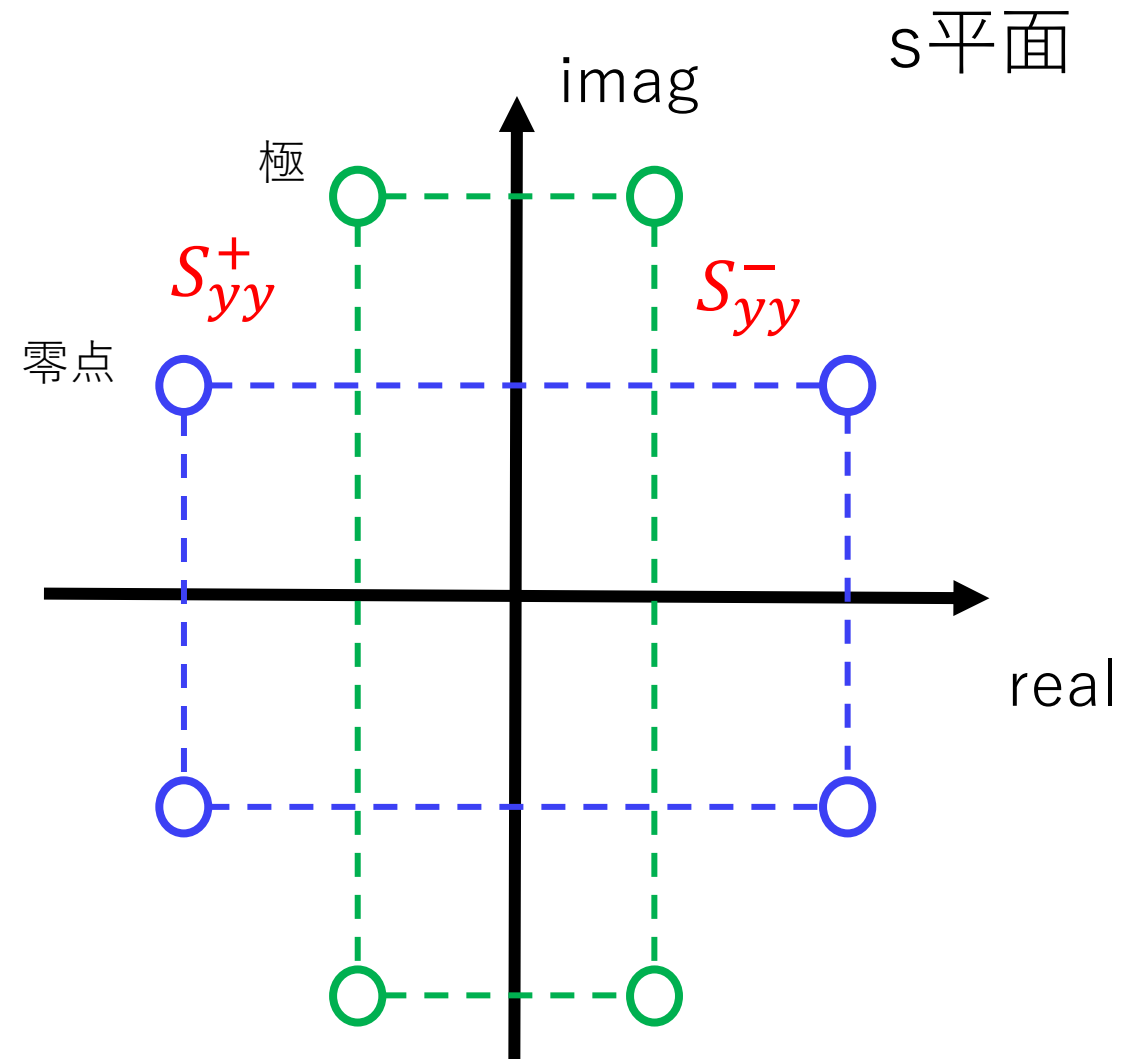
- 非因果的な場合

- $H = \frac{S_{yd}}{S_{yy}} = \frac{\langle y(\omega)d^*(\omega) \rangle}{S_{yy}}$

- $S_{yy} = S_{yy}^+ S_{yy}^-$

- 因果的な場合

- $H_q = \frac{1}{S_{yy}^+} \left[\frac{S_{qy}}{S_{yy}^-} \right]_+$

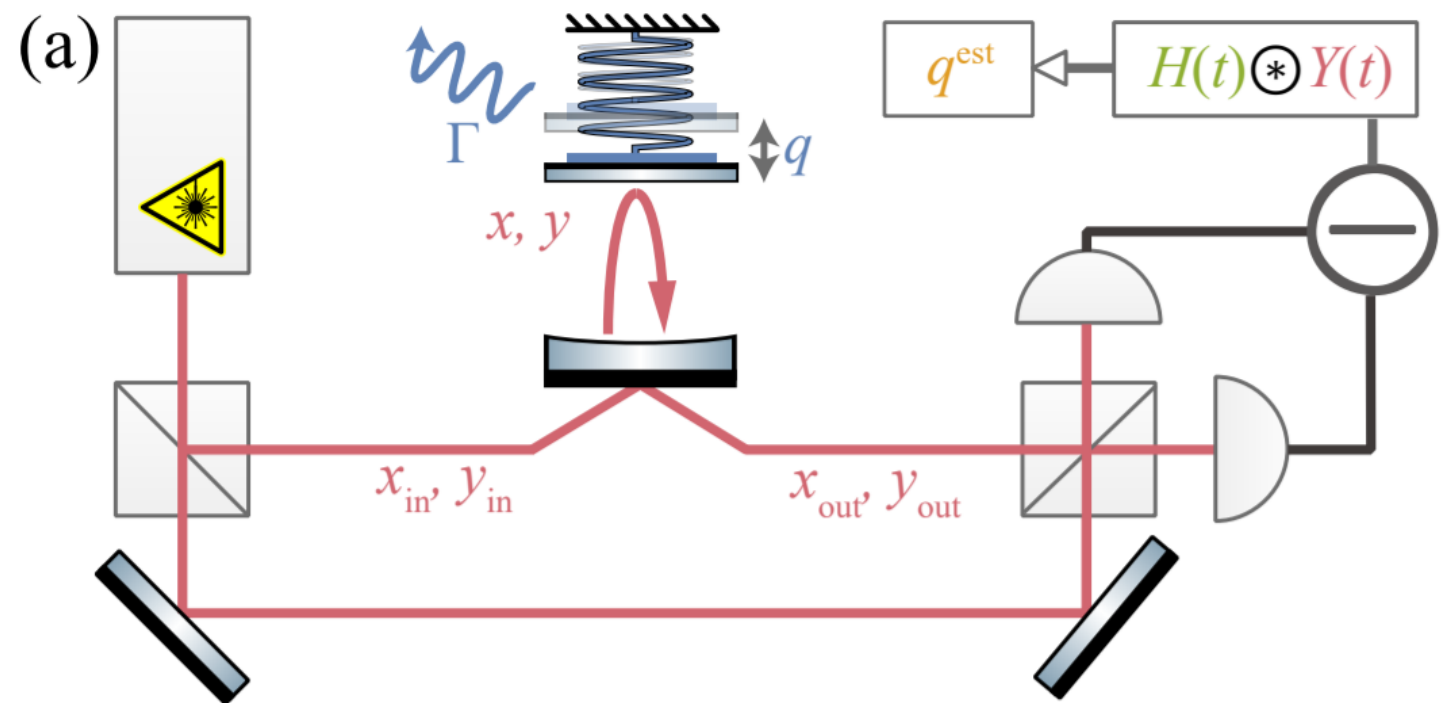


光ばね・光の直接検出、の場合

- 先行研究
光ばねなし、ホモダイン測定
(位相測定)

- 我々
光ばねあり (detuningあり)
直接検出 (振幅測定)

- 光検出が単純で容易、振動子のコヒーレンスが増大

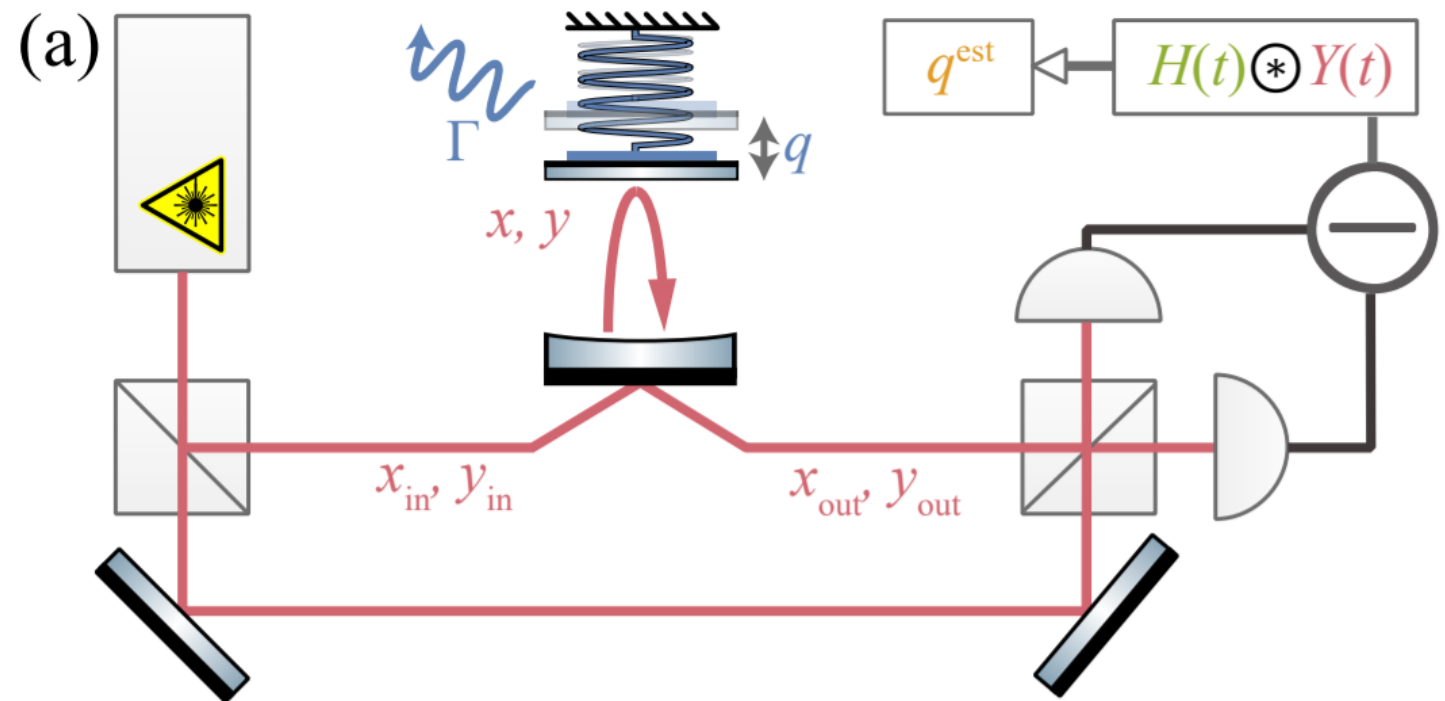


光ばね・光の直接検出、の場合

- 先行研究
光ばねなし、ホモダイン測定
(位相測定)

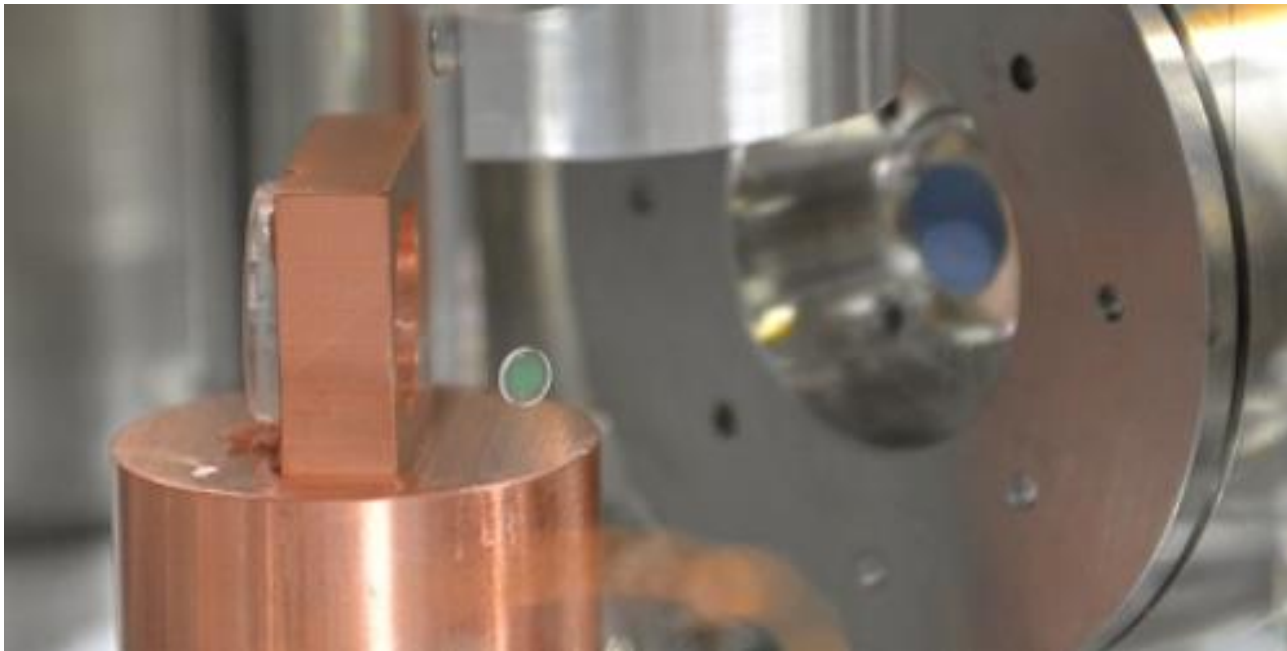
- 我々
光ばねあり (detuningあり)
直接検出 (振幅測定)

- 光検出が単純で容易、振動子のコヒーレンスが増大
- **理論が複雑**

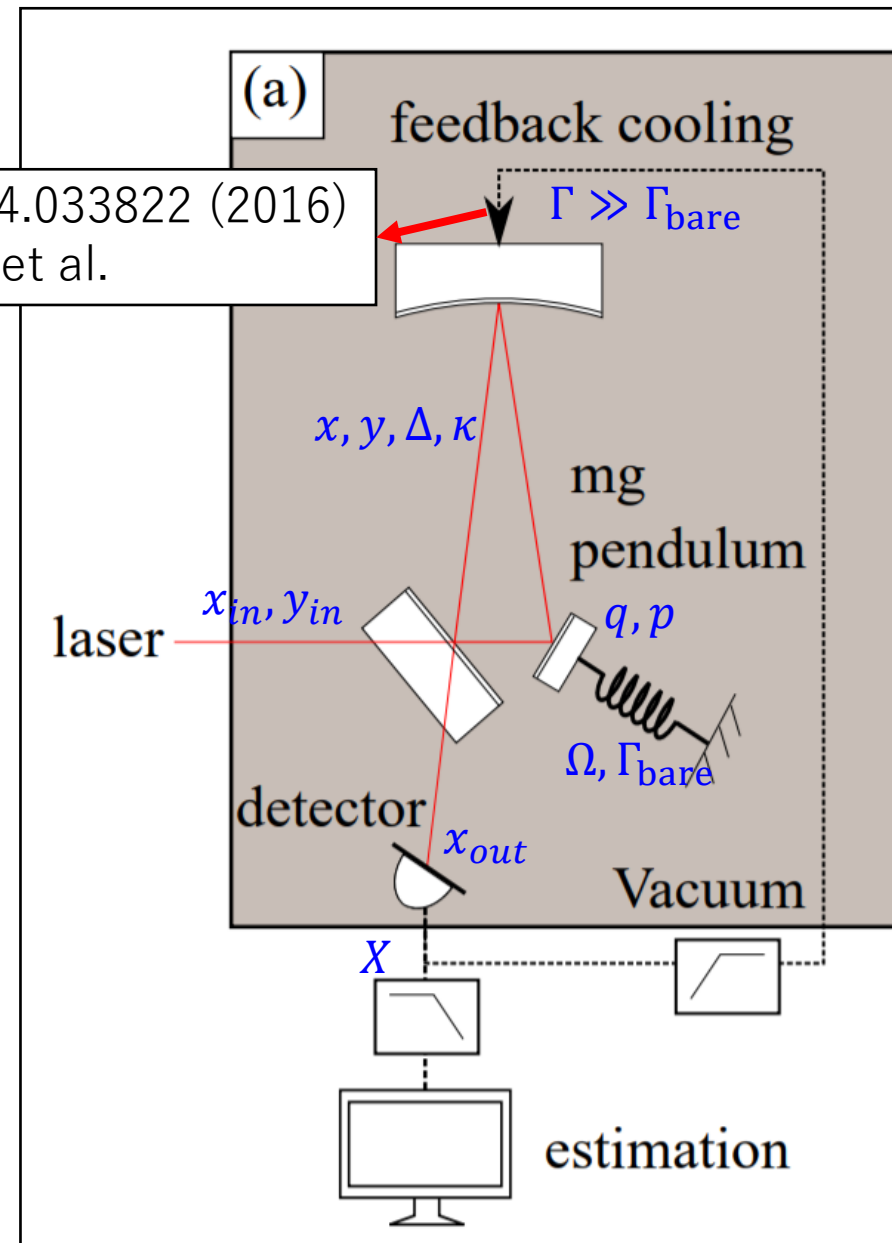


光ばねがあるとき

- 三角共振器で回転振動を光学トラップしてることは理論モデルには影響しない



PhysRevA.94.033822 (2016)
Matsumoto et al.



本研究のモデル

- 線形近似
- Dispersive coupling
($g \equiv \frac{\partial \omega_c}{\partial x} \sqrt{n_c} x_{\text{zpf,bare}}$)
- 離調による光ばね
- フィードバック冷却
- 光源雑音
- 検出口ス
- mg鏡以外は無視

$$\begin{aligned} \langle x_{in}^2 \rangle &= \langle y_{in}^2 \rangle = 2N_{th} + 1 \\ \langle p_{in}^2 \rangle &= 2n_{th} + 1 \end{aligned}$$

ハミルトニアン

$$H = \frac{\hbar\Omega}{4} (q^2 + p^2) - \frac{\hbar\Delta}{4} (x^2 + y^2) + \hbar g x q$$

ランジュバン方程式

$$\dot{x} = -\frac{\kappa}{2}x - \Delta y + \sqrt{\kappa}x_{in}$$

$$\dot{y} = -\frac{\kappa}{2}y + \Delta x + \sqrt{\kappa}y_{in} - 2gq$$

$$\dot{q} = \Omega p$$

$$\dot{p} = -\Omega q - \Gamma p + \sqrt{2\Gamma}p_{in} - 2gx - \int ds f(t-s)X$$

出力方程式

$$X = \sqrt{\eta}x_{out} + \sqrt{1-\eta}x'_{in}, x_{out} = x_{in} - \sqrt{\kappa}x$$

adiabatic limit

- adiabatic limit

$$\dot{q} = \Omega p,$$

$$\dot{p} = -\left(\Omega + \frac{16\Delta g^2}{\kappa^2 + 4\Delta^2}\right)q - \gamma_m p + \sqrt{2\gamma_m} p_{\text{in}} - \frac{4g\kappa\sqrt{\kappa}}{\kappa^2 + 4\Delta^2}x_{\text{in}} + \frac{8g\Delta\sqrt{\kappa}}{\kappa^2 + 4\Delta^2}y_{\text{in}},$$

$$X = -\frac{8\Delta g\sqrt{\kappa\eta}}{\kappa^2 + 4\Delta^2}q - \sqrt{\eta} \cdot \frac{\kappa^2 - 4\Delta^2}{\kappa^2 + 4\Delta^2}x_{\text{in}} + \frac{4\Delta\kappa\sqrt{\eta}}{\kappa^2 + 4\Delta^2}y_{\text{in}} + \sqrt{1-\eta}x'_{\text{in}},$$

adiabatic limit

- 光ばねで固有モードが変わるので、変数変換

$$q = q' \sqrt{\frac{\Omega}{\omega_m}}, \quad p = p' \sqrt{\frac{\omega_m}{\Omega}}, \quad \omega_m = \sqrt{\frac{16\Delta g^2}{\kappa^2 + 4\Delta^2} \Omega + \Omega^2},$$

- adiabatic limit

$$\dot{q} = \Omega p,$$

$$\dot{p} = -\left(\Omega + \frac{16\Delta g^2}{\kappa^2 + 4\Delta^2}\right)q - \gamma_m p + \sqrt{2\gamma_m} p_{\text{in}} - \frac{4g\kappa\sqrt{\kappa}}{\kappa^2 + 4\Delta^2} x_{\text{in}} + \frac{8g\Delta\sqrt{\kappa}}{\kappa^2 + 4\Delta^2} y_{\text{in}},$$

$$X = -\frac{8\Delta g\sqrt{\kappa\eta}}{\kappa^2 + 4\Delta^2} q - \sqrt{\eta} \cdot \frac{\kappa^2 - 4\Delta^2}{\kappa^2 + 4\Delta^2} x_{\text{in}} + \frac{4\Delta\kappa\sqrt{\eta}}{\kappa^2 + 4\Delta^2} y_{\text{in}} + \sqrt{1 - \eta} x'_{\text{in}},$$

adiabatic limit

- 光ばねで固有モードが変わるので、変数変換

$$q = q' \sqrt{\frac{\Omega}{\omega_m}}, \quad p = p' \sqrt{\frac{\omega_m}{\Omega}}, \quad \omega_m = \sqrt{\frac{16\Delta g^2}{\kappa^2 + 4\Delta^2} \Omega + \Omega^2},$$

- adiabatic limit

$$\dot{q} = \omega_m p,$$

$$\dot{p} = -\omega_m q - \gamma_m p + \sqrt{2\gamma_m} p_{\text{in}} - \frac{4g_m \kappa \sqrt{\kappa}}{\kappa^2 + 4\Delta^2} x_{\text{in}} + \frac{8g_m \Delta \sqrt{\kappa}}{\kappa^2 + 4\Delta^2} y_{\text{in}},$$

$$X = -\frac{8\Delta g_m \sqrt{\kappa \eta}}{\kappa^2 + 4\Delta^2} q - \sqrt{\eta} \cdot \frac{\kappa^2 - 4\Delta^2}{\kappa^2 + 4\Delta^2} x_{\text{in}} + \frac{4\Delta \kappa \sqrt{\eta}}{\kappa^2 + 4\Delta^2} y_{\text{in}} + \sqrt{1 - \eta} x'_{\text{in}},$$

adiabatic limit

- 光ばねで固有モードが変わるので、変数変換

$$q = q' \sqrt{\frac{\Omega}{\omega_m}}, \quad p = p' \sqrt{\frac{\omega_m}{\Omega}}, \quad \omega_m = \sqrt{\frac{16\Delta g^2}{\kappa^2 + 4\Delta^2} \Omega + \Omega^2},$$

- adiabatic limit

$$\dot{q} = \omega_m p,$$

$$\dot{p} = -\omega_m q - \gamma_m p + \sqrt{2\gamma_m} p_{\text{in}} - \frac{4g_m \kappa \sqrt{\kappa}}{\kappa^2 + 4\Delta^2} x_{\text{in}} + \frac{8g_m \Delta \sqrt{\kappa}}{\kappa^2 + 4\Delta^2} y_{\text{in}},$$

$$X = -\frac{8\Delta g_m \sqrt{\kappa \eta}}{\kappa^2 + 4\Delta^2} q - \sqrt{\eta} \cdot \frac{\kappa^2 - 4\Delta^2}{\kappa^2 + 4\Delta^2} x_{\text{in}} + \frac{4\Delta \kappa \sqrt{\eta}}{\kappa^2 + 4\Delta^2} y_{\text{in}} + \sqrt{1 - \eta} x'_{\text{in}},$$

ウィーナーフィルター—解析解



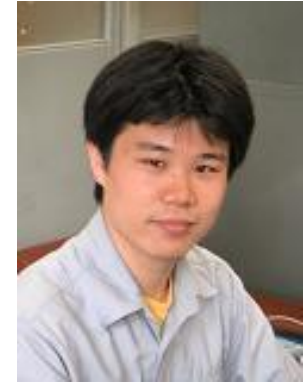
$$H_q(\omega) = \tilde{A}(1 - i\tilde{B}\omega)\chi'(\omega), \chi'(\omega) = \frac{1}{\Omega'^2 - i\Gamma'\omega - \omega^2}$$

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= \frac{4g\Omega\kappa\sqrt{\kappa\eta}}{\kappa^2 + 4\Delta^2} \cdot \frac{2N_{\text{th}} + 1}{2\eta N_{\text{th}} + 1} \cdot \frac{(\Omega^2 - \Gamma^2 - \Gamma\Gamma' - \Omega'^2)(\Omega^2 - \tilde{\Omega}^2)}{(\Gamma'\Omega^2 + \Gamma\Omega'^2)(\Gamma + \Gamma') + (\Omega^2 - \Omega'^2)^2}, \quad \tilde{B} = \frac{\Gamma + \Gamma'}{\Omega'^2 - \Omega^2 + \Gamma^2 + \Gamma\Gamma'}. \\ \Gamma' &= \sqrt{\alpha + 2\sqrt{\beta}} \text{ and } \Omega'^2 = \sqrt{\beta}. \\ \alpha &= \frac{(2N_{\text{th}} + 1)\eta}{2\eta N_{\text{th}} + 1} \cdot \frac{64\Delta g^2 \kappa^2 \Omega}{(\kappa^2 + 4\Delta^2)^2} + \Gamma^2 - 2\Omega^2, \\ \beta &= \frac{(2N_{\text{th}} + 1)\eta}{2\eta N_{\text{th}} + 1} \left\{ \frac{1}{\kappa^2 + 4\Delta^2} \left(\frac{32\Delta g^2 \Omega \kappa}{\kappa^2 + 4\Delta^2} \right)^2 - \frac{64\Delta g^2 \kappa^2 \Omega^3}{(\kappa^2 + 4\Delta^2)^2} \right\} + \frac{(2n_{\text{th}} + 1)\eta}{2\eta N_{\text{th}} + 1} \cdot \frac{128\Delta^2 g^2 \Omega^2 \kappa \Gamma}{(\kappa^2 + 4\Delta^2)^2} + \Omega^4. \\ \tilde{\Omega}^2 &= \Omega^2 - \frac{32g^2 \Omega \Delta}{\kappa^2 + 4\Delta^2} - \frac{4\Delta \Omega \Gamma}{\kappa} \cdot \frac{2n_{\text{th}} + 1}{2N_{\text{th}} + 1}.\end{aligned}$$

直感的な理解

- ・出力X(光の直交位相振幅)から鏡の位置qのパワースペクトルを最適推定 (フィルターの次元は1/sqrt(Hz)、フィルターのゲインは校正係数)
- ・微分項は推定誤差の低減 (冷却)
- ・感受率の項はS/N比の高い領域を選定 (高周波成分除去)

ウィーナーフィルター—解析解



$$H_q(\omega) = \tilde{A}(1 - i\tilde{B}\omega)\chi'(\omega), \chi'(\omega) = \frac{1}{\Omega'^2 - i\Gamma'\omega - \omega^2}$$

モデルパラメータ
(ノイズの特性も)
に依存

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= \frac{4g\Omega\kappa\sqrt{\kappa\eta}}{\kappa^2 + 4\Delta^2} \cdot \frac{2N_{\text{th}} + 1}{2\eta N_{\text{th}} + 1} \cdot \frac{(\Omega^2 - \Gamma^2 - \Gamma\Gamma' - \Omega'^2)(\Omega^2 - \tilde{\Omega}^2)}{(\Gamma'\Omega^2 + \Gamma\Omega'^2)(\Gamma + \Gamma') + (\Omega^2 - \Omega'^2)^2}, \quad \tilde{B} = \frac{\Gamma + \Gamma'}{\Omega'^2 - \Omega^2 + \Gamma^2 + \Gamma\Gamma'} \\ \Gamma' &= \sqrt{\alpha + 2\sqrt{\beta}} \text{ and } \Omega'^2 = \sqrt{\beta}. \\ \alpha &= \frac{(2N_{\text{th}} + 1)\eta}{2\eta N_{\text{th}} + 1} \cdot \frac{64\Delta g^2 \kappa^2 \Omega}{(\kappa^2 + 4\Delta^2)^2} + \Gamma^2 - 2\Omega^2, \\ \beta &= \frac{(2N_{\text{th}} + 1)\eta}{2\eta N_{\text{th}} + 1} \left\{ \frac{1}{\kappa^2 + 4\Delta^2} \left(\frac{32\Delta g^2 \Omega \kappa}{\kappa^2 + 4\Delta^2} \right)^2 - \frac{64\Delta g^2 \kappa^2 \Omega^3}{(\kappa^2 + 4\Delta^2)^2} \right\} + \frac{(2n_{\text{th}} + 1)\eta}{2\eta N_{\text{th}} + 1} \cdot \frac{128\Delta^2 g^2 \Omega^2 \kappa \Gamma}{(\kappa^2 + 4\Delta^2)^2} + \Omega^4. \\ \tilde{\Omega}^2 &= \Omega^2 - \frac{32g^2 \Omega \Delta}{\kappa^2 + 4\Delta^2} - \frac{4\Delta \Omega \Gamma}{\kappa} \cdot \frac{2n_{\text{th}} + 1}{2N_{\text{th}} + 1}.\end{aligned}$$

直感的な理解

- ・出力X(光の直交位相振幅)から鏡の位置qのパワースペクトルを最適推定 (フィルターの次元は1/sqrt(Hz)、フィルターのゲインは校正係数)
- ・微分項は推定誤差の低減 (冷却)
- ・感受率の項はS/N比の高い領域を選定 (高周波成分除去)

ウィーナーフィルター—解析解

$H_q(\omega) = \tilde{A}(1 - i\tilde{B}\omega)\chi'(\omega), \chi'(\omega) = \frac{1}{\Omega'^2 - i\Gamma'\omega - \omega^2}$

振り子の揺れ
(unconditional state)

共分散の解析解
(X依存なし)
数値計算との
一致を確認

$$V_{\delta q \delta q} = \frac{1}{2\Gamma\Omega^2} \{ \tilde{D} - (2\eta N_{th} + 1)\tilde{A}^2(1 + \tilde{B}^2\Omega^2) \},$$
$$V_{\delta p \delta p} = \frac{1}{2\Gamma\Omega^2} \{ \tilde{D} - (2\eta N_{th} + 1)\tilde{A}^2\tilde{B}^2 \left[\left(\frac{\Omega'^2 - \Omega^2}{\Gamma' + \Gamma} \right)^2 + \Omega^2 \right] \},$$
$$V_{\delta q \delta p} = -\frac{(2\eta N_{th} + 1)\tilde{A}^2\tilde{B}^2}{2\Omega}.$$

Squeezing

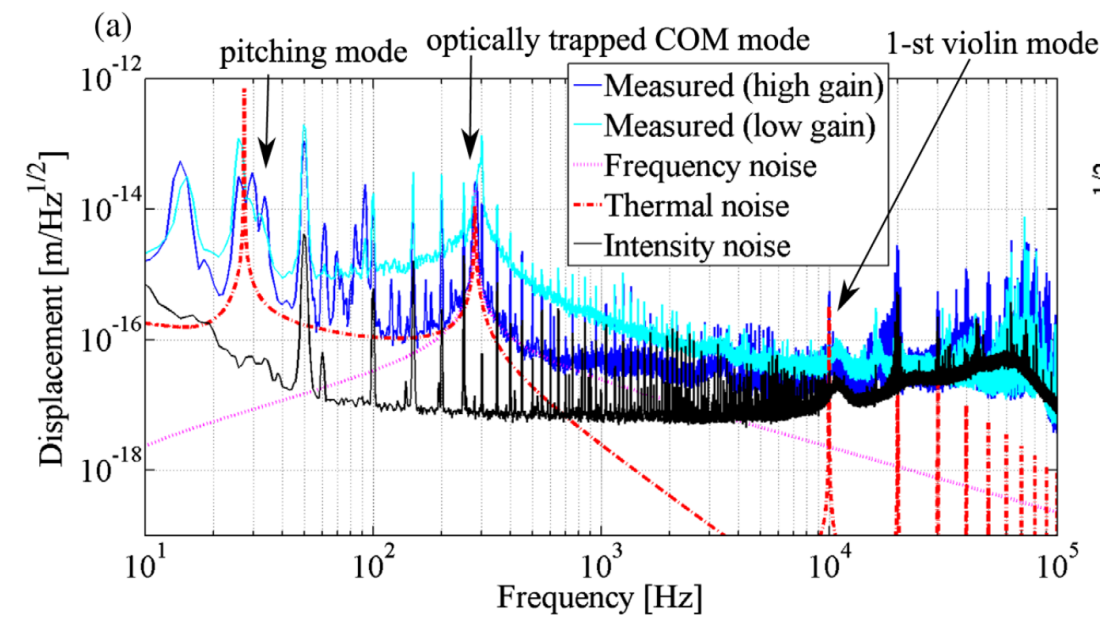
Cooling
(purifying)

直感的な理解

- 出力X(光の直交位相振幅)から鏡の位置qのパワースペクトルを最適推定 (フィルターの次元は1/sqrt(Hz)、フィルターのゲインは校正係数)
- 微分項は推定誤差の低減 (冷却)
- 感受率の項はS/N比の高い領域を選定 (高周波成分除去)

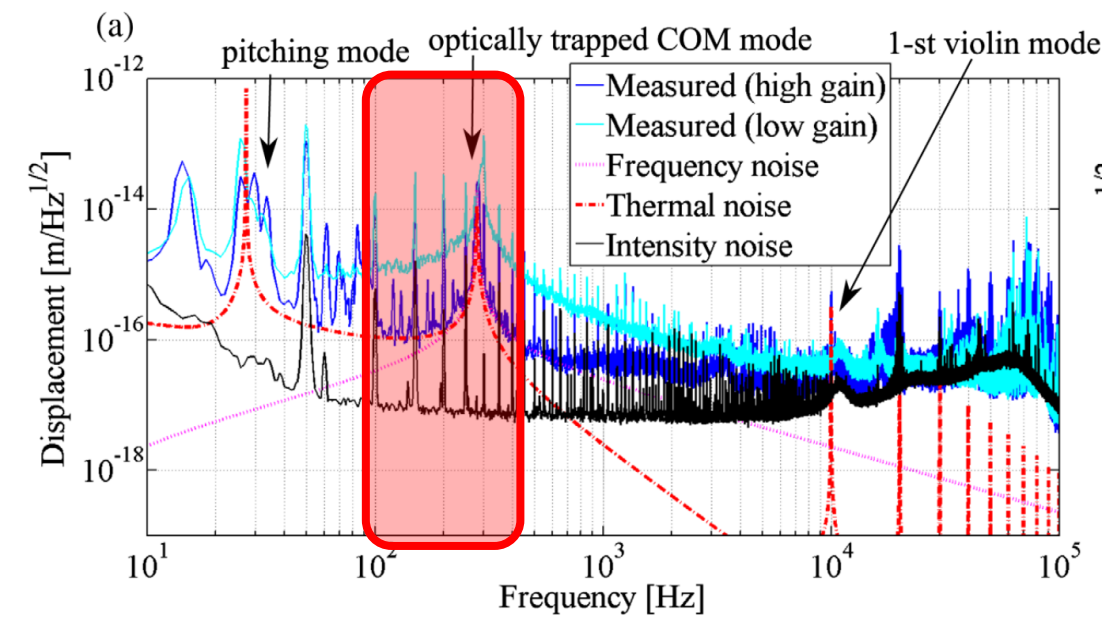
変位測定結果

- 変位計測



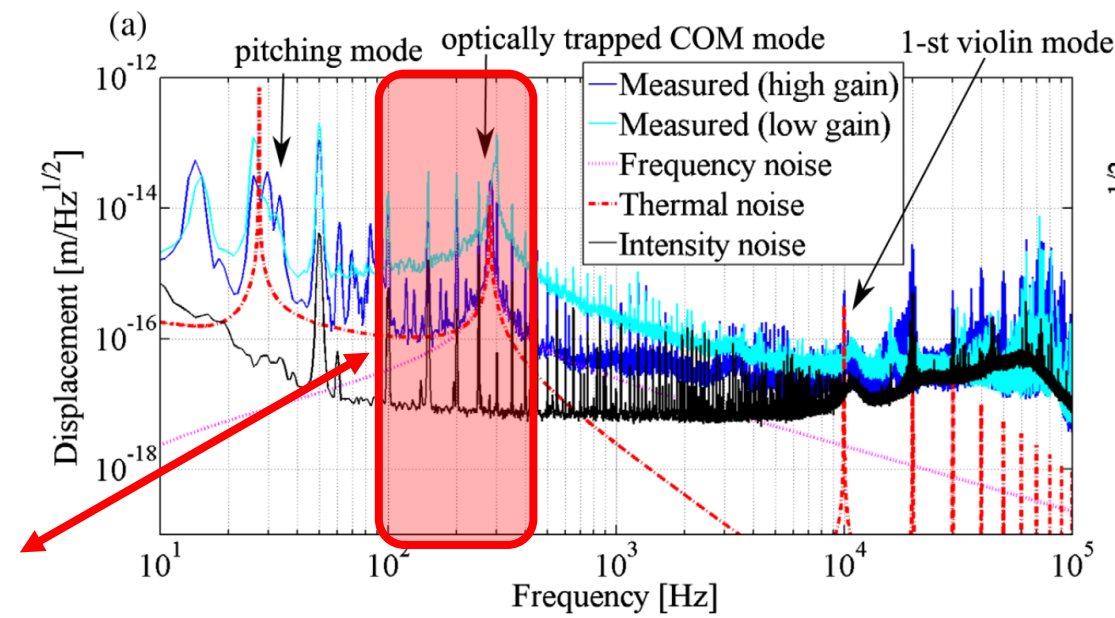
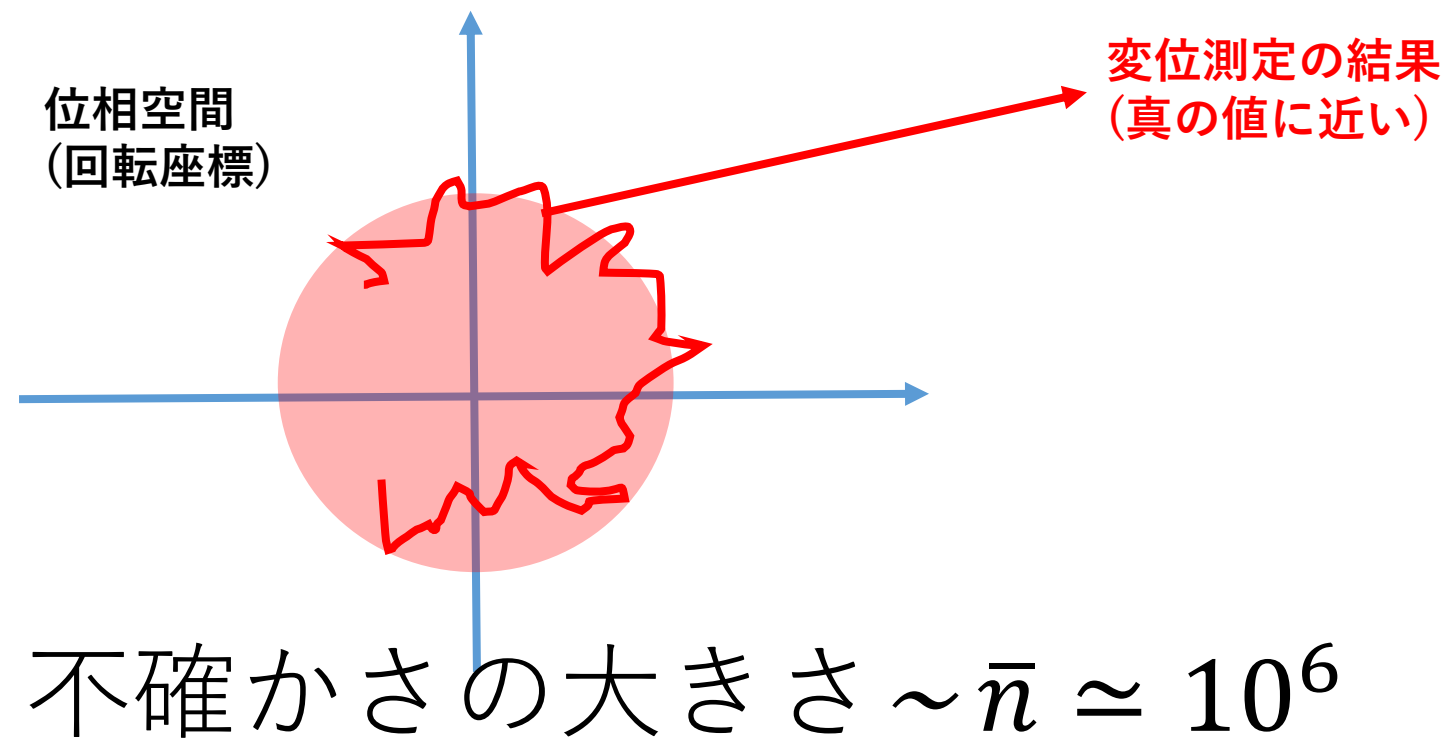
変位測定結果

- 変位計測



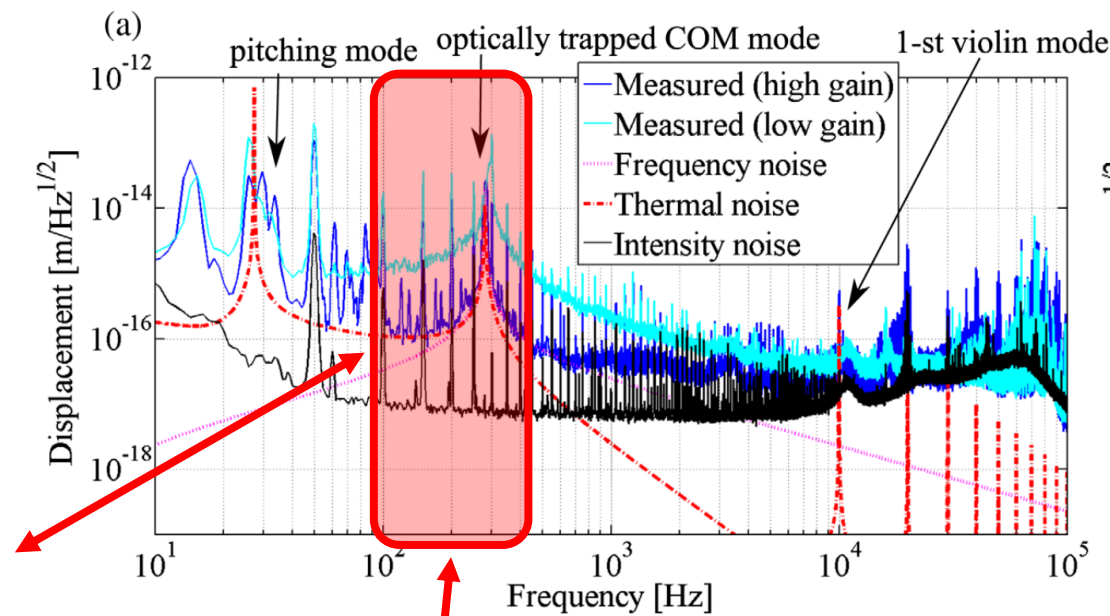
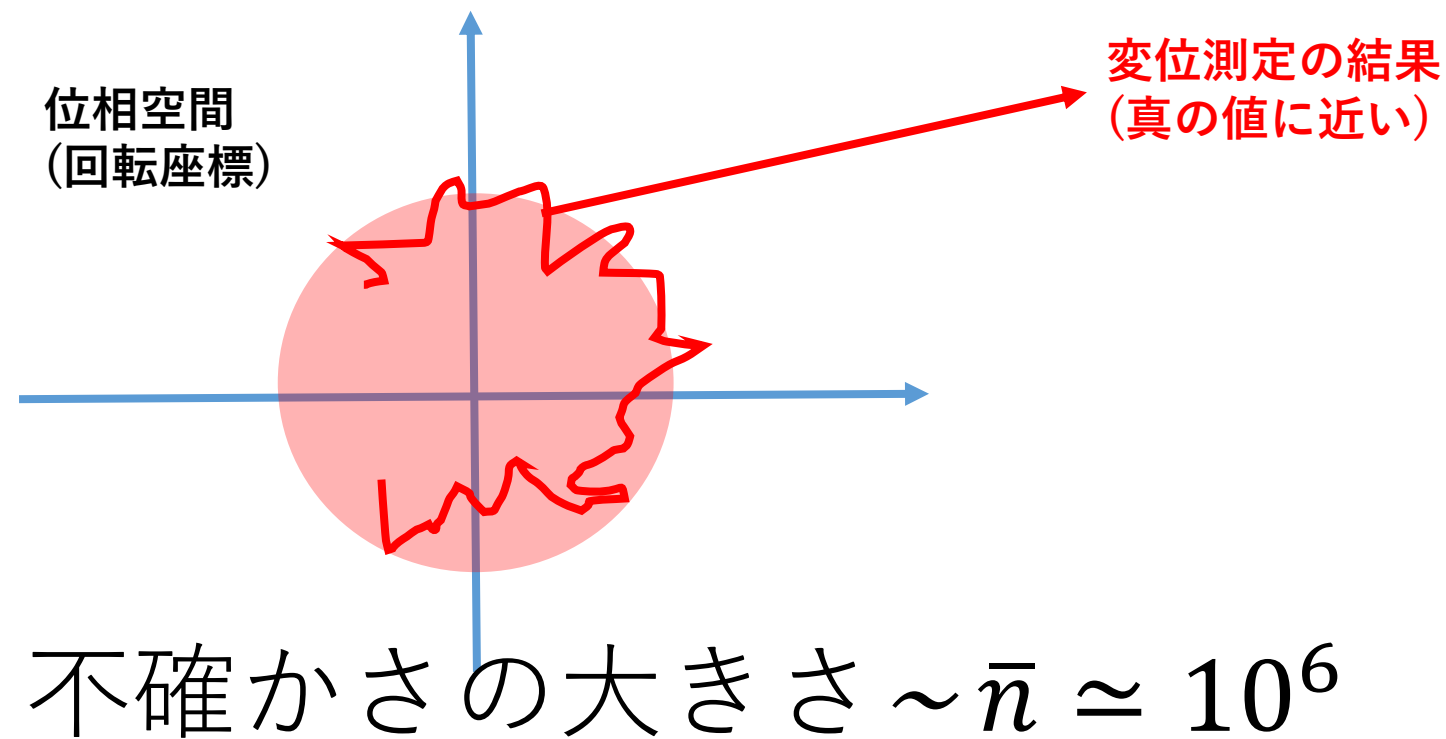
変位測定結果

- 変位計測

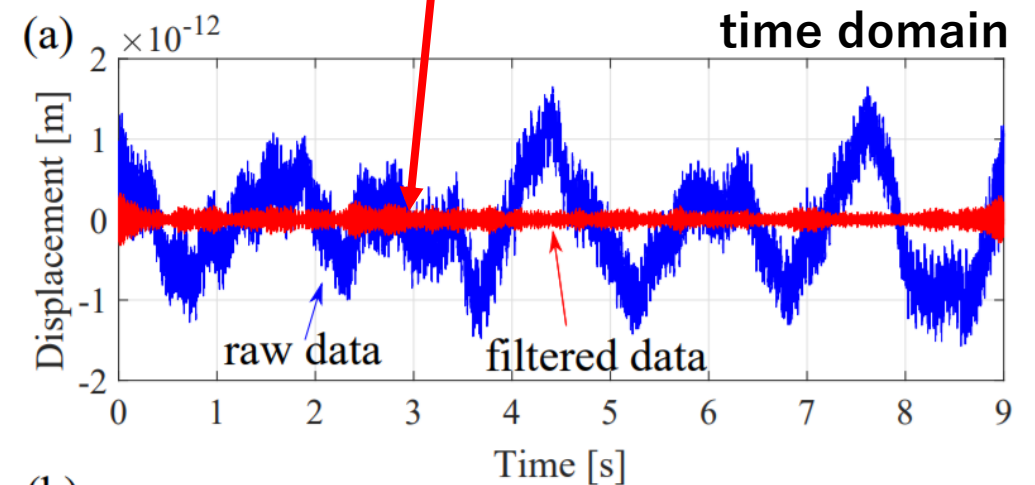


変位測定結果

• 変位計測



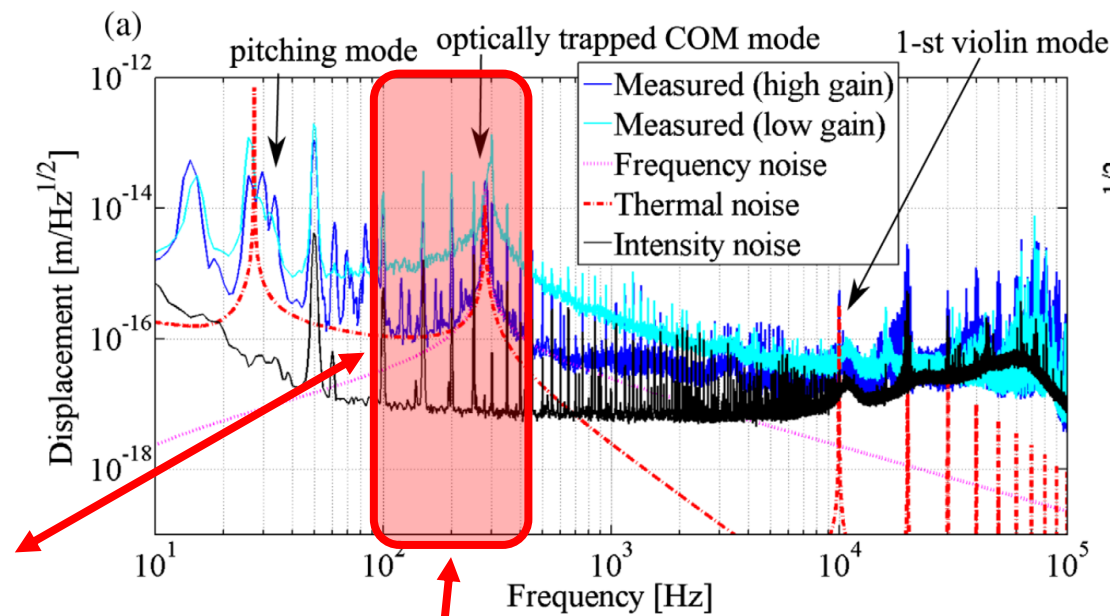
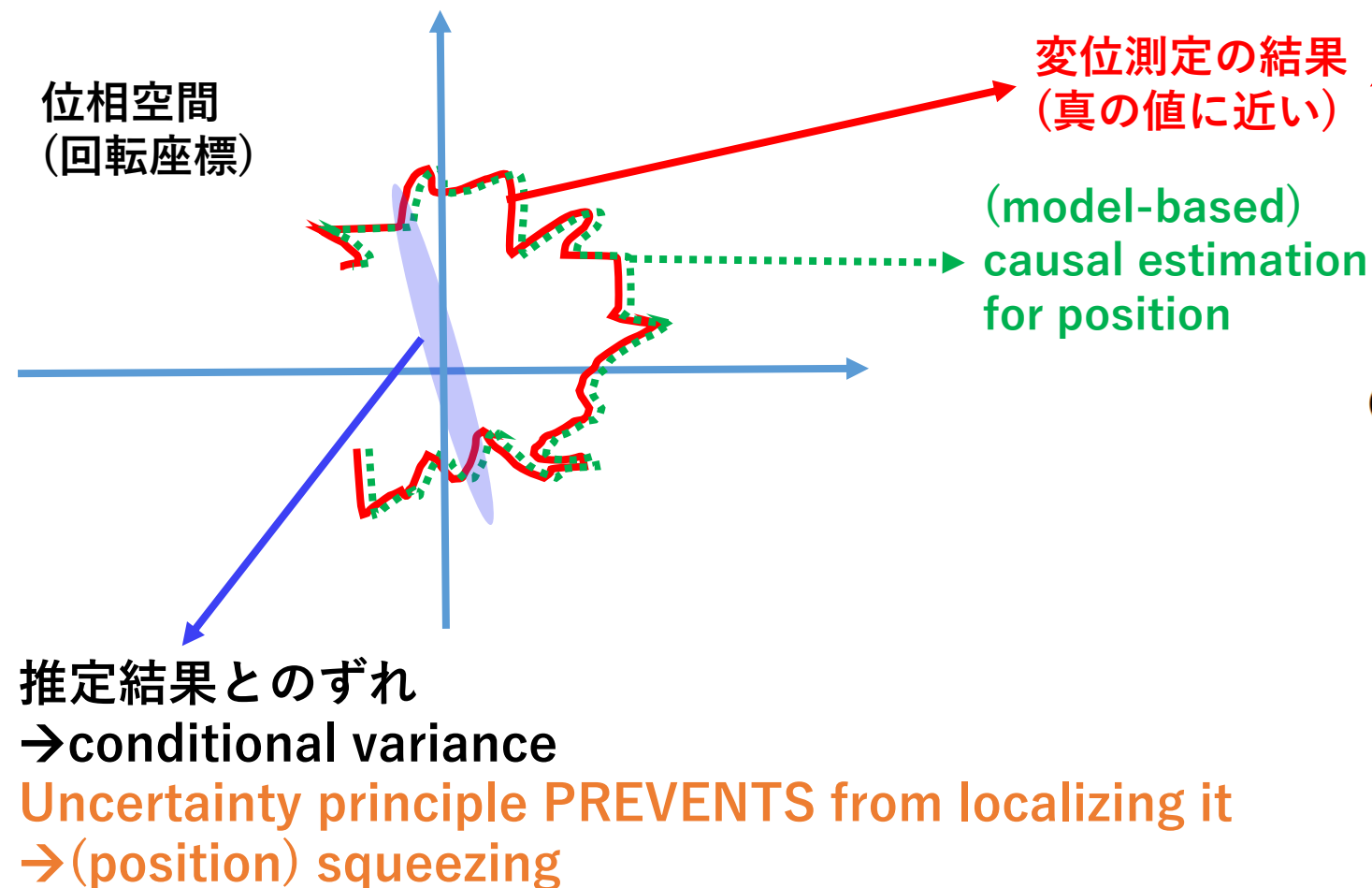
バンドパスフィルタ



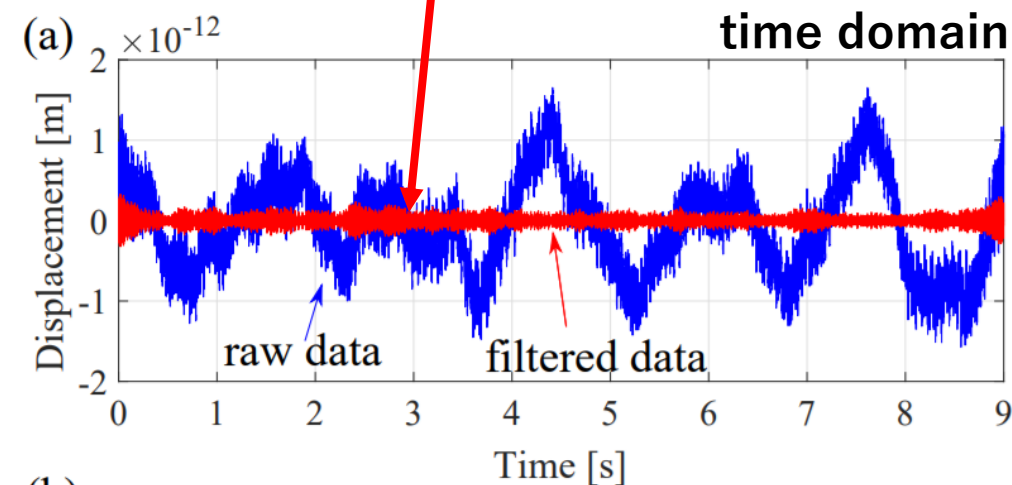
状態推定のイメージ

• 位置推定

→ (測定に条件つけられた) スクイズ



band-pass filtered data
(Brownian motion)



条件付き誤差の分配

線形計測

$y = Ax + noise$, C : 校正係数

$y' = \int ds g_{BP} y$, g_{BP} : バンドパスフィルタ

$x \simeq \frac{y'}{A}$ (PRL2019のブラウン運動観測)

なんでスクイーズされるか？

→ 確率論の観点からの回答

条件付き誤差の分配

なんでスクイーズされるか？
→確率論の観点からの回答

線形計測

$y = Ax + noise$, C :校正係数

$y' = \int ds g_{BP} y$, g_{BP} :バンドパスフィルタ

$x \simeq \frac{y'}{A}$ (PRL2019のブラウン運動観測)

量子状態推定 (ウィーナフィルタ)

$$\langle x \rangle_c = E[x|y] = \int dx x p(x|y)$$

$$V_c = \langle x^2 \rangle_c - \langle x \rangle_c^2$$

条件付き誤差の分配

なんでスクイーズされるか？
→確率論の観点からの回答

線形計測

$y = Ax + \text{noise}$, C : 校正係数

$y' = \int ds g_{BP} y$, g_{BP} : バンドパスフィルタ

$x \simeq \frac{y'}{A}$ (PRL2019のブラウン運動観測)

量子状態推定 (ウィーナフィルタ)

$$\langle x \rangle_c = E[x|y] = \int dx x p(x|y)$$

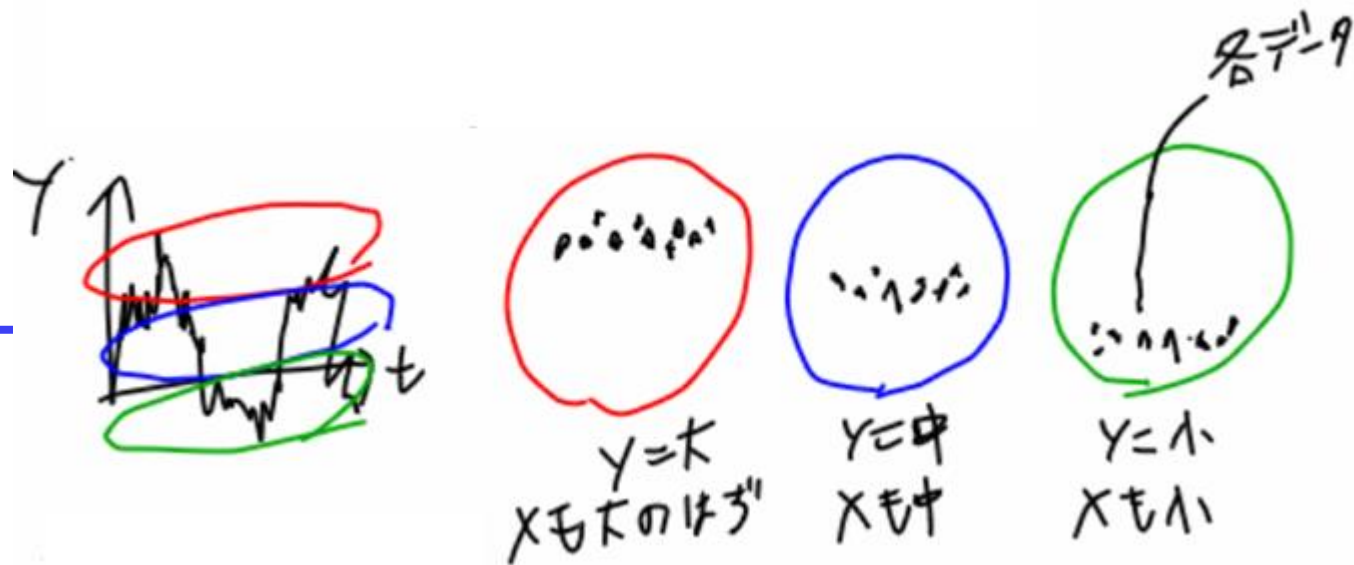
$$V_c = \langle x^2 \rangle_c - \langle x \rangle_c^2$$

EVE's law

$$\begin{aligned} V[x] &= E[V[x|y]] + V[E[x|y]] \\ &= \langle V_c \rangle + \langle \langle x \rangle_c^2 \rangle \end{aligned}$$

unconditional variance=

within-group variance + between-group variance



条件付き誤差の分配

線形計測

$y = Ax + \text{noise}$, C : 校正係数

$y' = \int ds g_{BP} y$, g_{BP} : バンドパスフィルタ

$x \simeq \frac{y'}{A}$ (PRL2019のブラウン運動観測)

真の値はわからないので

$$\langle V_C \rangle = \langle (x - \langle x \rangle_c)^2 \rangle$$

$$\simeq \left\langle \left(\frac{y'}{A} - \langle x \rangle_c \right)^2 \right\rangle$$

で推定

量子状態推定 (ウィーナフィルタ)

$$\langle x \rangle_c = E[x|y] = \int dx x p(x|y)$$

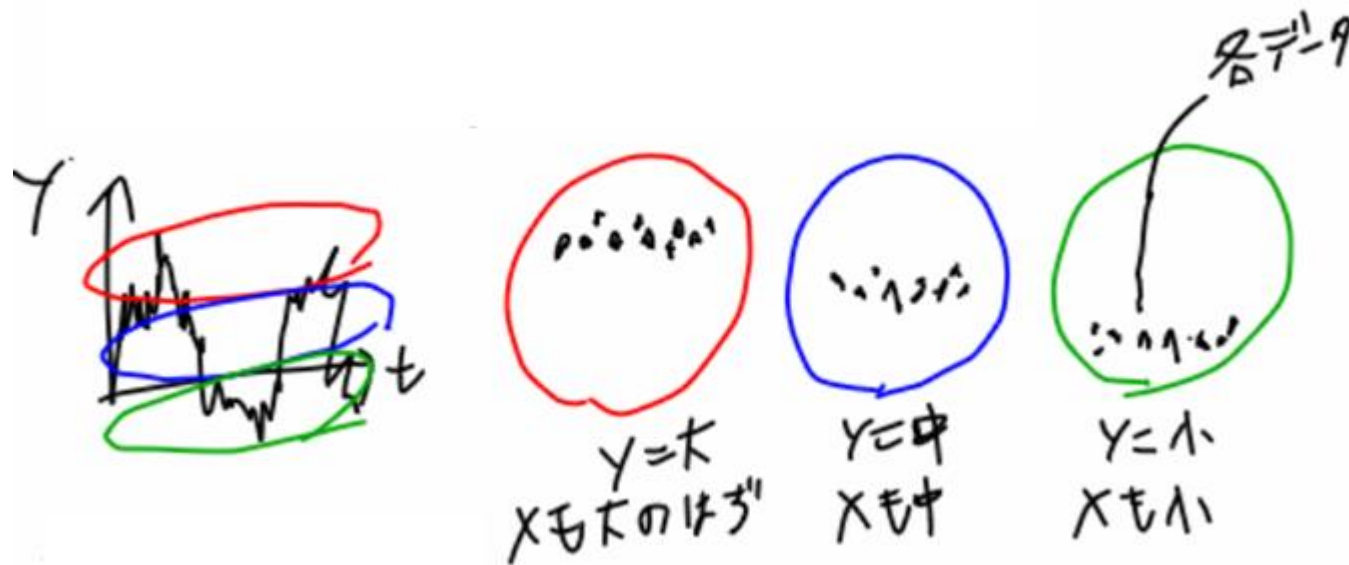
$$V_C = \langle x^2 \rangle_c - \langle x \rangle_c^2$$

EVE's law

$$\begin{aligned} V[x] &= E[V[x|y]] + V[E[x|y]] \\ &= \langle V_C \rangle + \langle \langle x \rangle_c^2 \rangle \end{aligned}$$

unconditional variance=

within-group variance + between-group variance

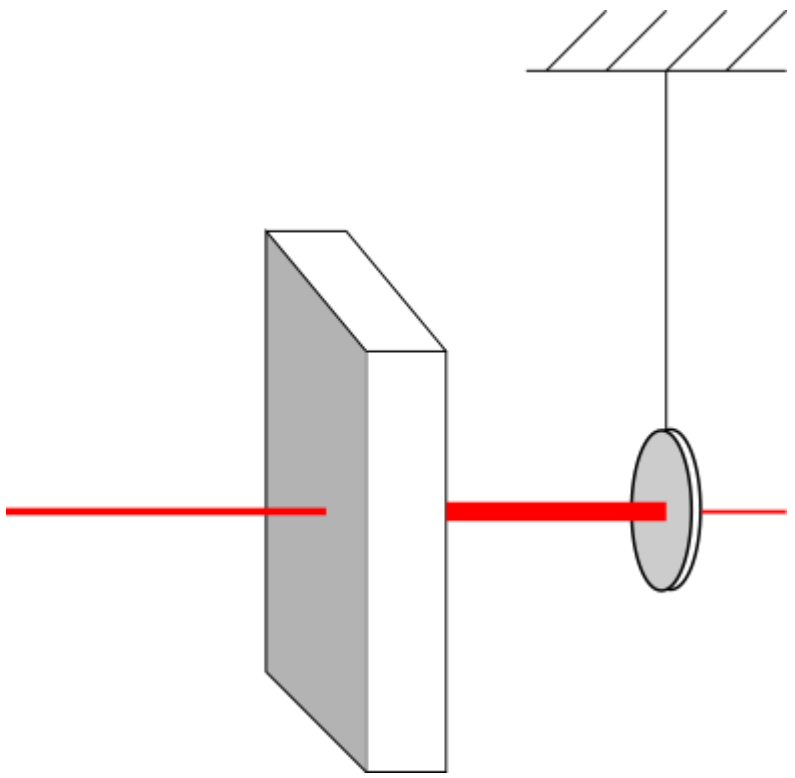
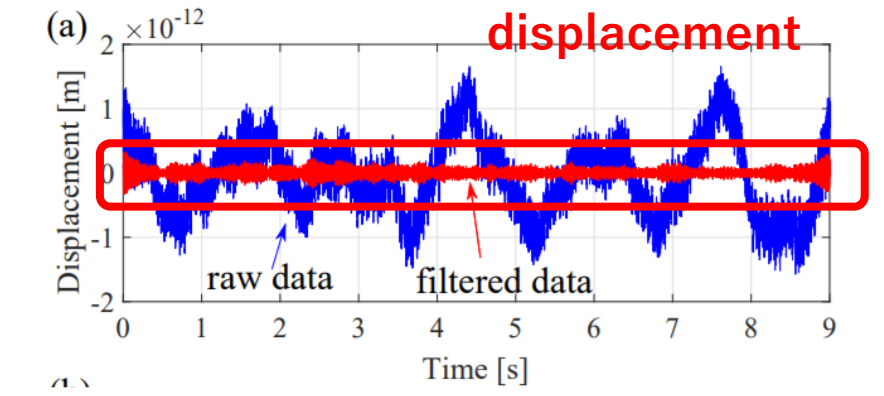


モデルパラメータの特定

- 光ばねの特性を利用してパラメータを特定

TABLE I. Optomechanical parameters

Parameter	Value
Mass	$m = 7.71(1) \text{ mg}$
Cavity decay rate	$\kappa = 2\pi 1.64(2) \text{ MHz}$
Cavity detuning	$\Delta = 0.0292(4) \times \kappa$
Circulating photon number	$n_c = 1.17(6) \times 10^{10}$
Frequency shift per displacement	$G = -2\pi 4.72(3) \text{ PHz/m}$
Light-enhanced coupling	$g_m = -2\pi 3.2(2) \times 10^4 \text{ Hz}$
Phonon occupancy	$n_{\text{th}} = 8(2) \times 10^5$
Quantum cooperativity	$C_q = 0.0027(8)$

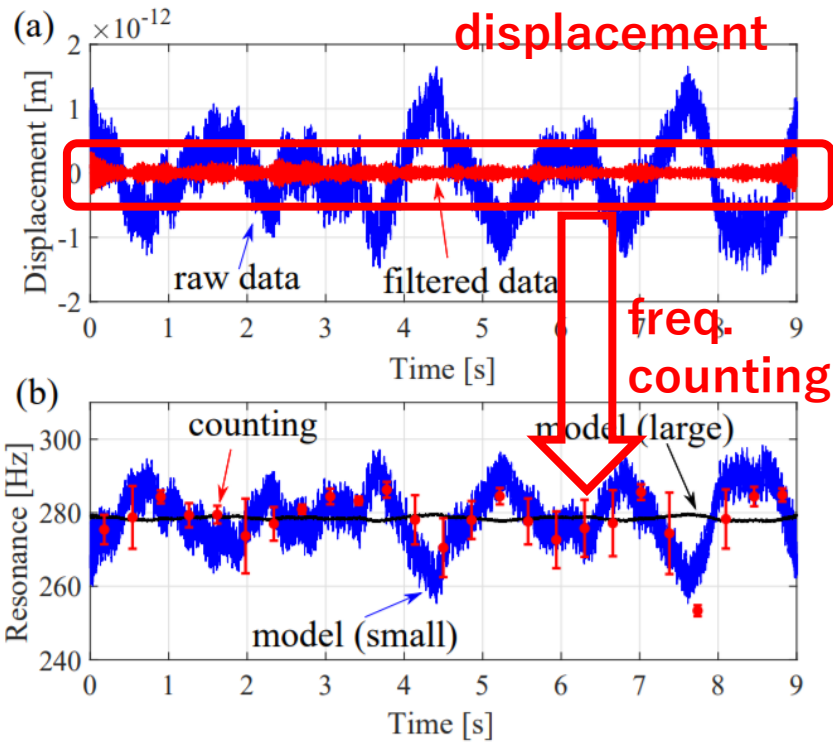


モデルパラメータの特定

- 光ばねの特性を利用してパラメータを特定

TABLE I. Optomechanical parameters

Parameter	Value
Mass	$m = 7.71(1) \text{ mg}$
Cavity decay rate	$\kappa = 2\pi 1.64(2) \text{ MHz}$
Cavity detuning	$\Delta = 0.0292(4) \times \kappa$
Circulating photon number	$n_c = 1.17(6) \times 10^{10}$
Frequency shift per displacement	$G = -2\pi 4.72(3) \text{ PHz/m}$
Light-enhanced coupling	$g_m = -2\pi 3.2(2) \times 10^4 \text{ Hz}$
Phonon occupancy	$n_{\text{th}} = 8(2) \times 10^5$
Quantum cooperativity	$C_q = 0.0027(8)$

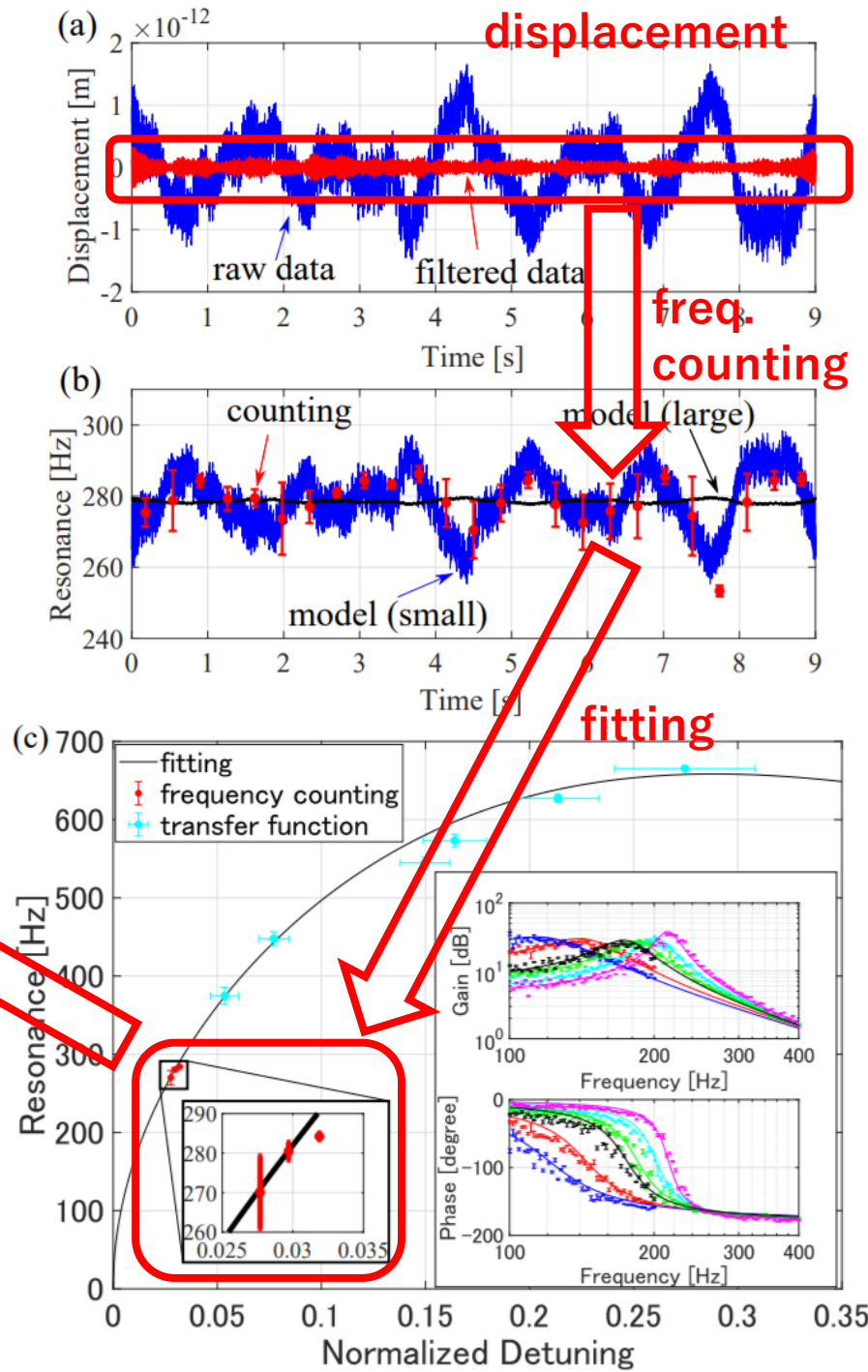


モデルパラメータの特定

- 光ばねの特性を利用してパラメータを特定

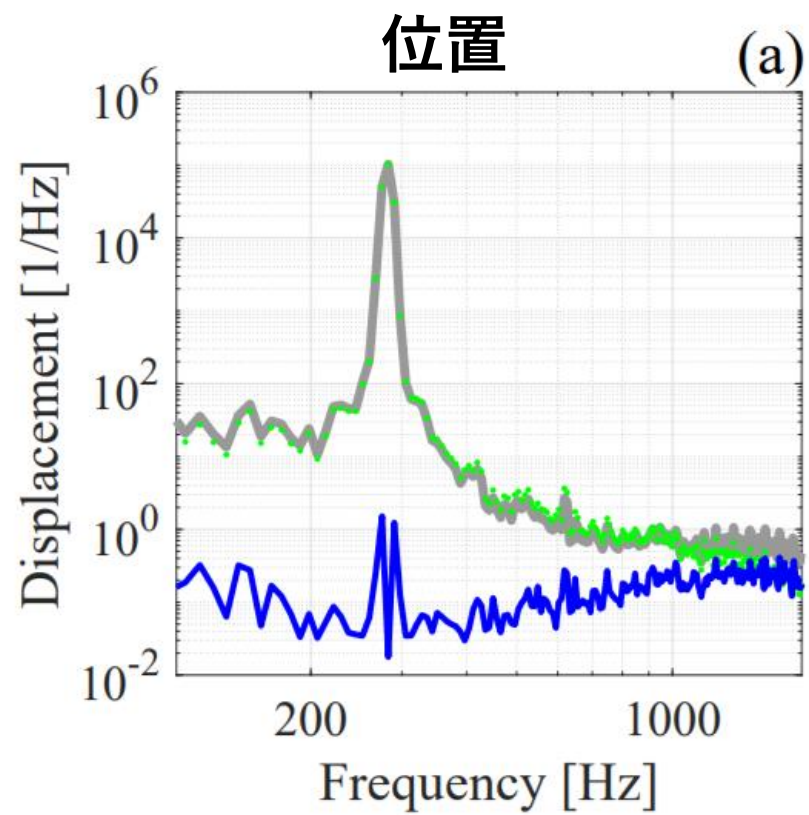
TABLE I. Optomechanical parameters

Parameter	Value
Mass	$m = 7.71(1) \text{ mg}$
Cavity decay rate	$\kappa = 2\pi 1.64(2) \text{ MHz}$
Cavity detuning	$\Delta = 0.0292(4) \times \kappa$
Circulating photon number	$n_c = 1.17(6) \times 10^{10}$
Frequency shift per displacement	$G = -2\pi 4.72(3) \text{ PHz/m}$
Light-enhanced coupling	$g_m = -2\pi 3.2(2) \times 10^4 \text{ Hz}$
Phonon occupancy	$n_{\text{th}} = 8(2) \times 10^5$
Quantum cooperativity	$C_q = 0.0027(8)$



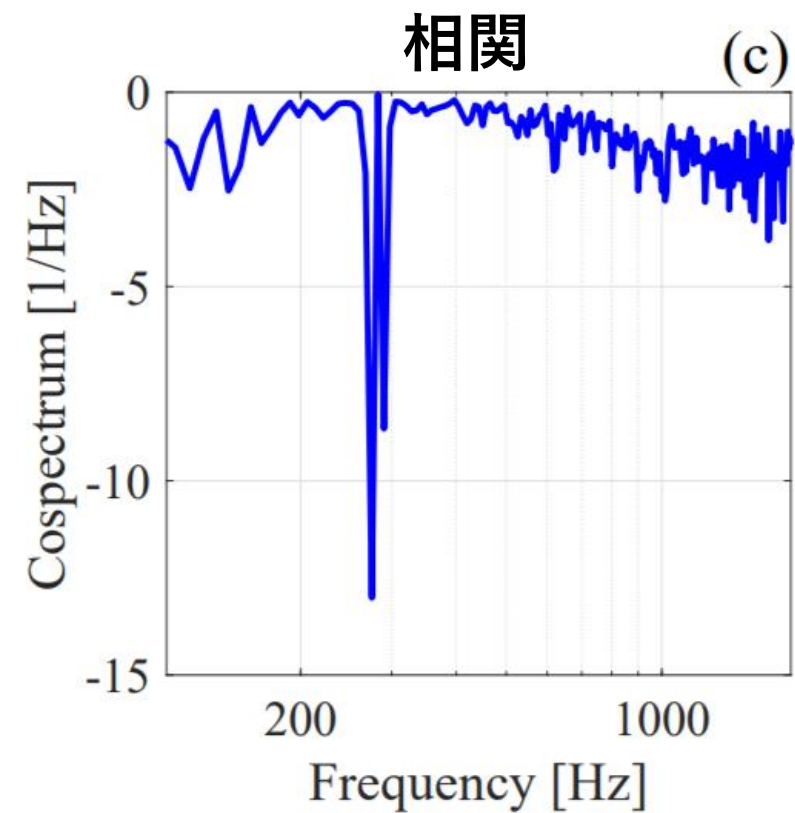
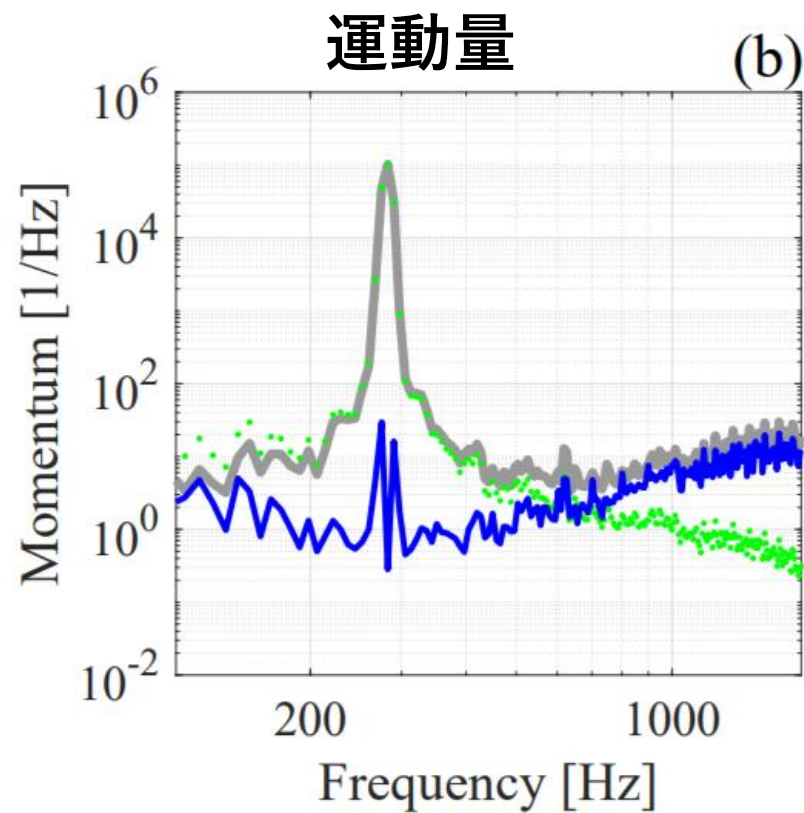
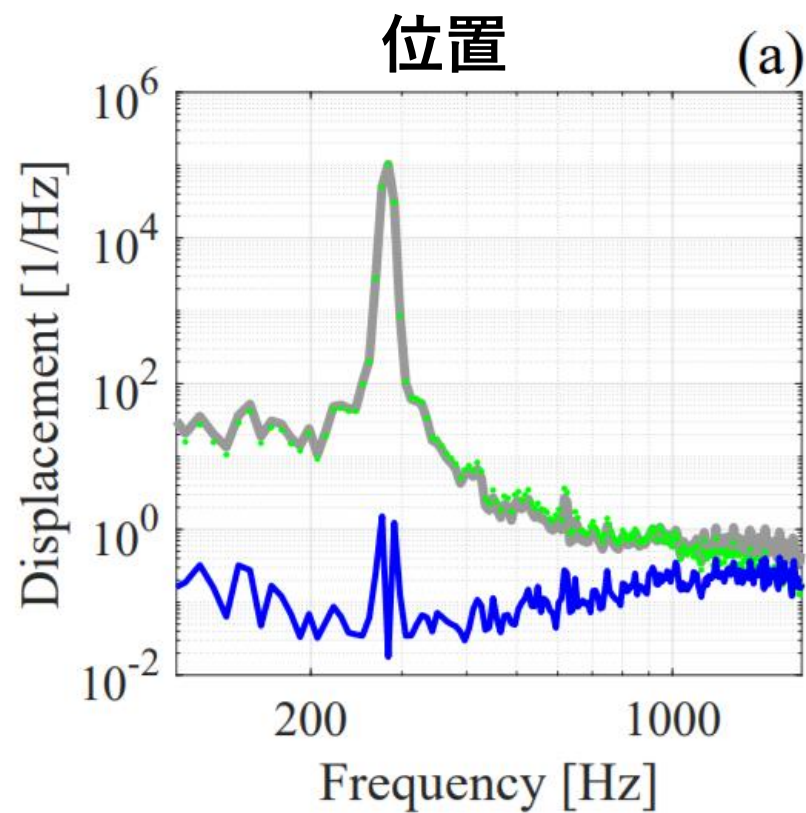
結果

- measured data
- estimated data (prediction)
- difference

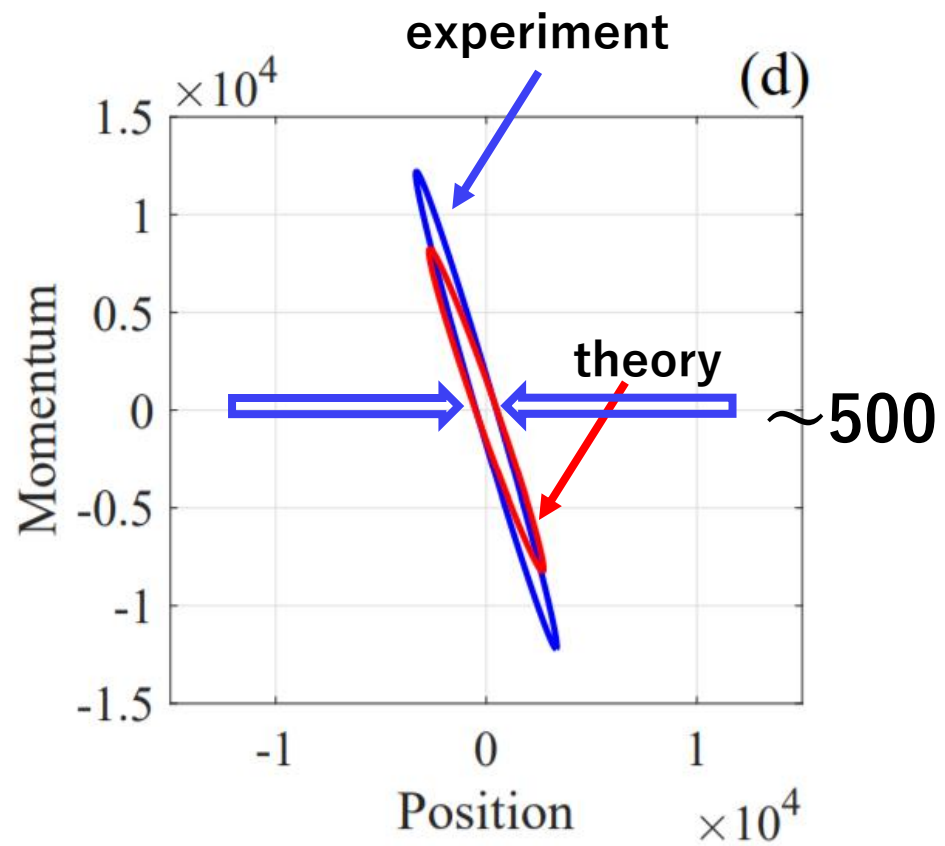


結果

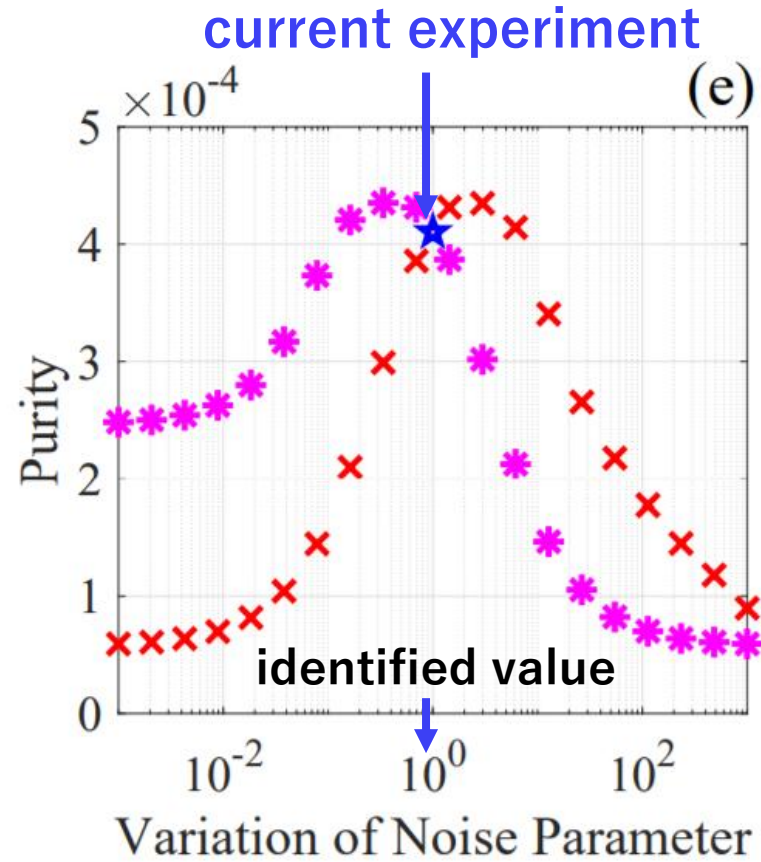
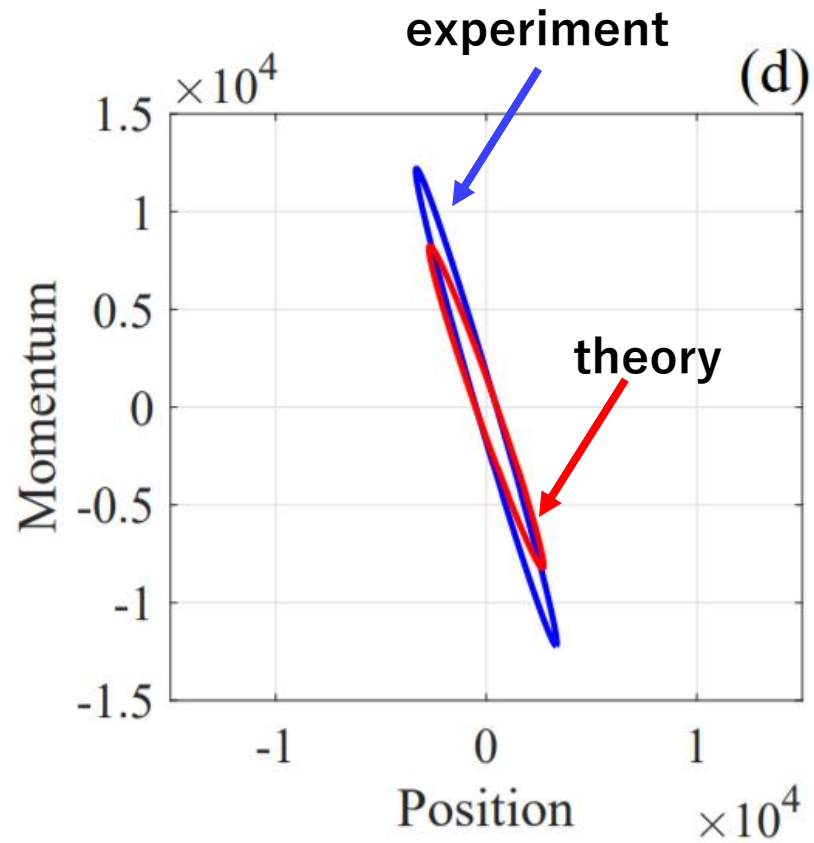
- measured data
- estimated data (prediction)
- difference



結果



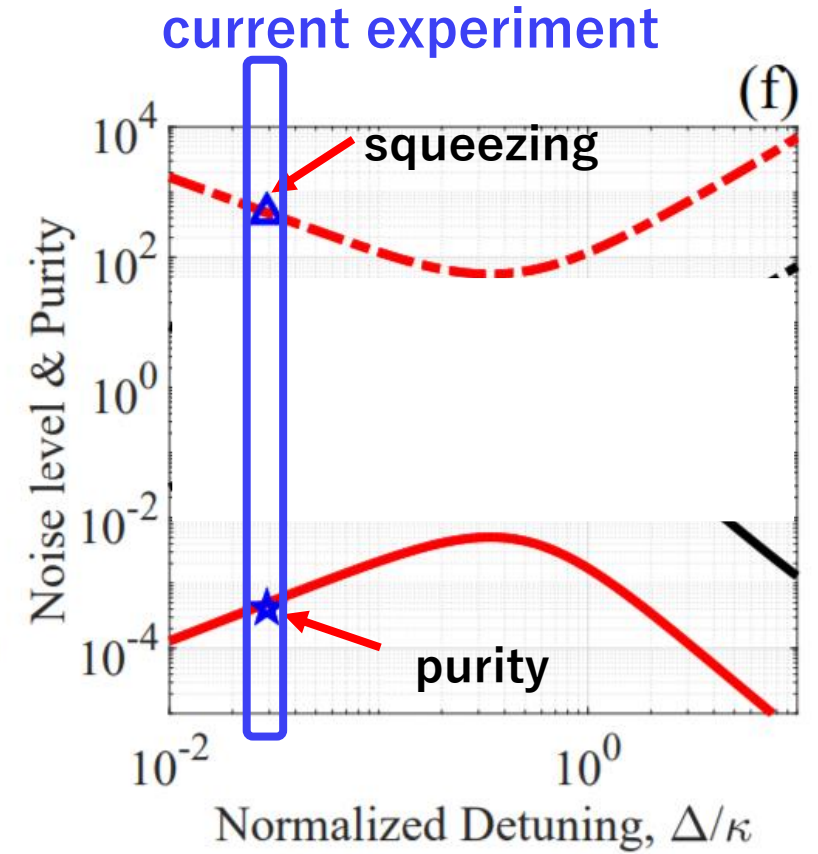
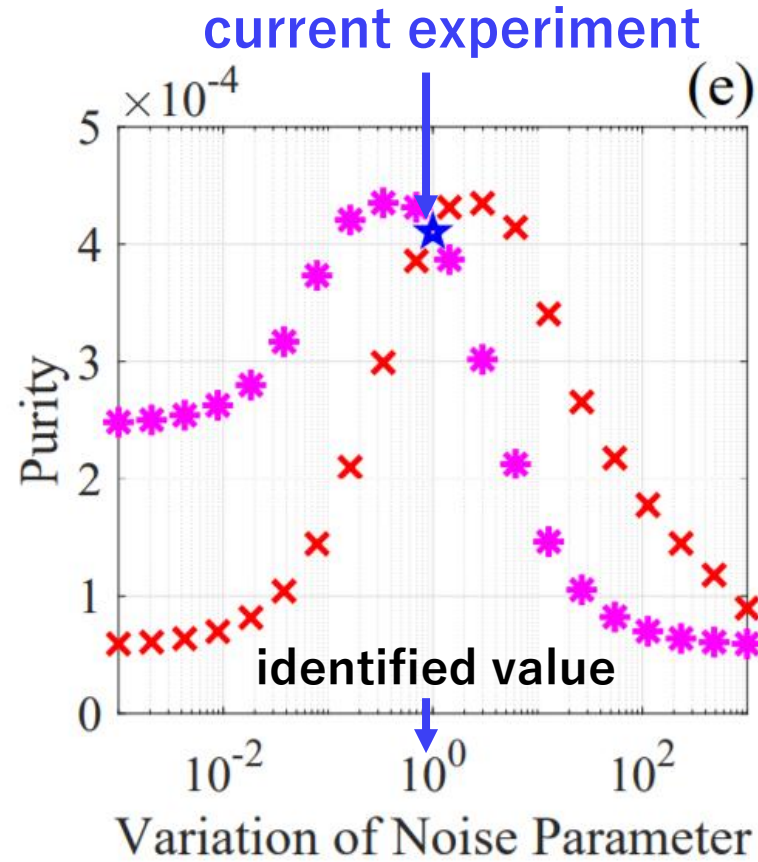
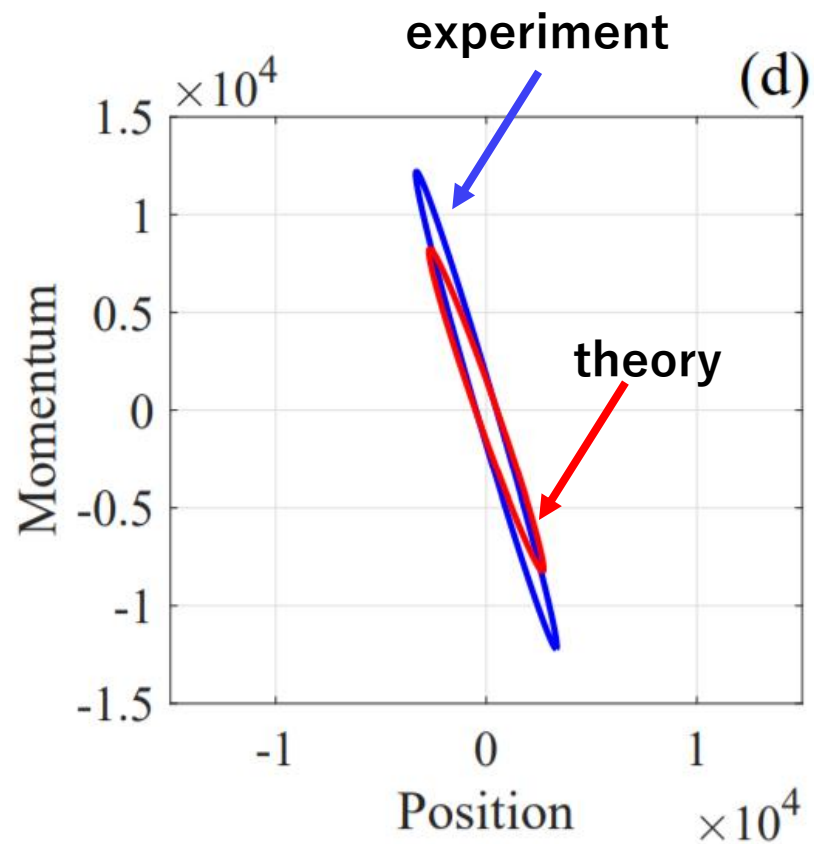
結果



$$\bar{n}, N$$

in Wiener filter

結果

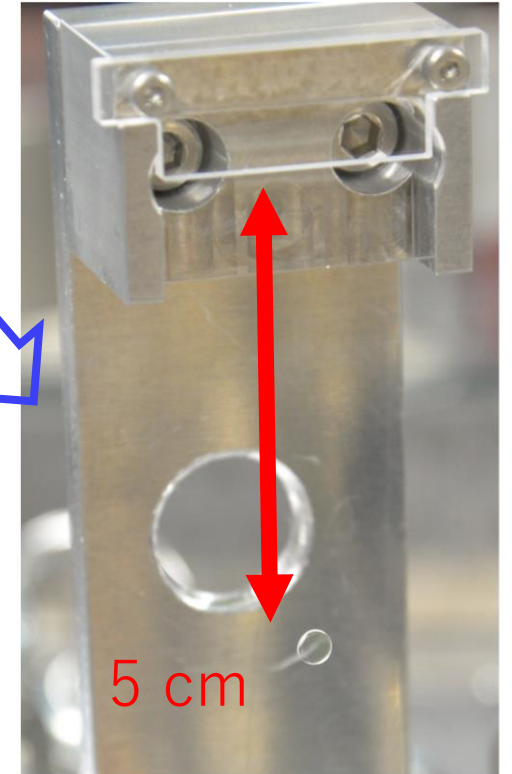
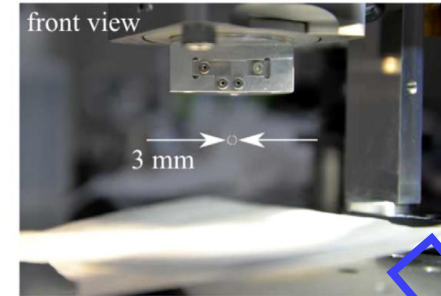


\bar{n}, N

in Wiener filter

量子スクイーズに向けて

- スクイーズの原理検証は成功
- 真空場揺らぎよりは小さくできていない
→ もっと散逸を下げる必要あり！
- 既に低散逸化に成功！



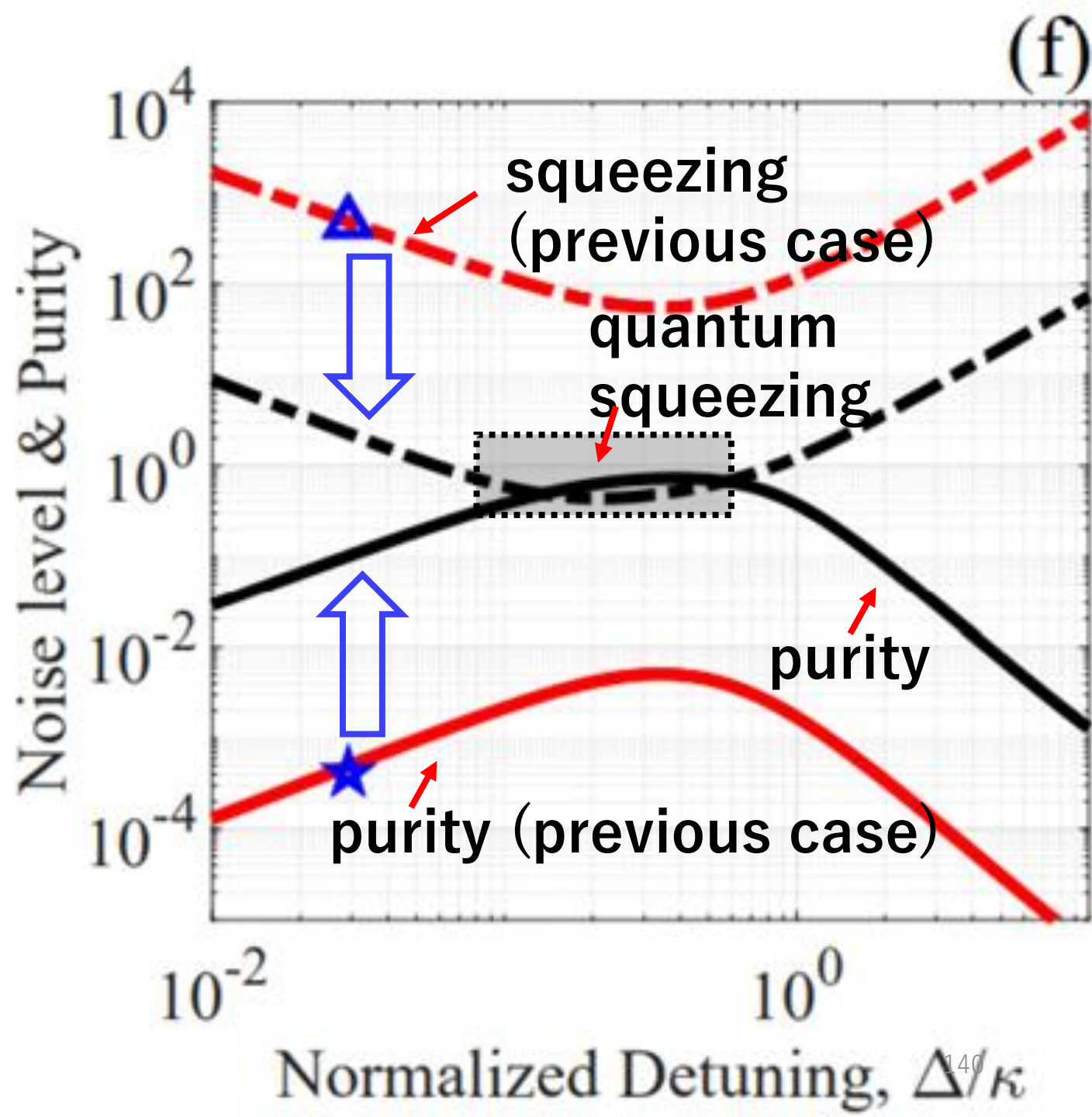
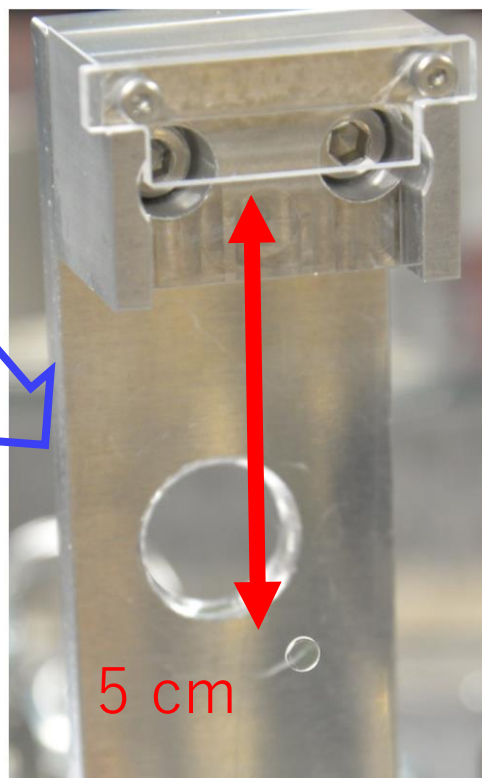
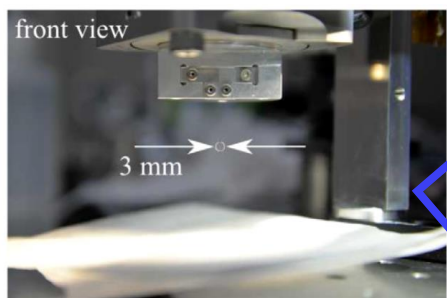
PHYSICAL REVIEW LETTERS **124**, 221102 (2020)

High- Q Milligram-Scale Monolithic Pendulum for Quantum-Limited Gravity Measurements

Seth B. Cataño-Lopez^{1,*}, Jordy G. Santiago-Condori¹, Keiichi Edamatsu¹, and Nobuyuki Matsumoto^{1,2,3,†}

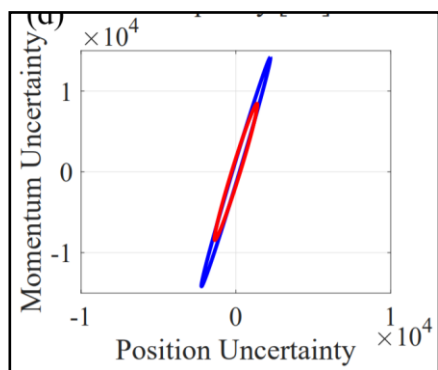
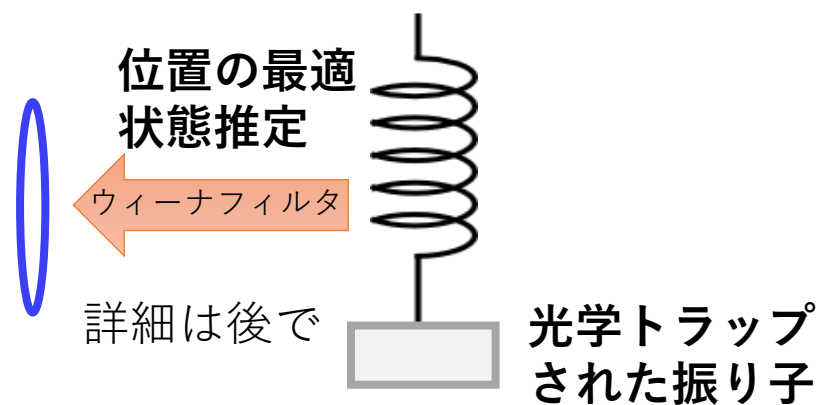
将来計画

- モノリシック振子を使えば量子スクイズ可能！

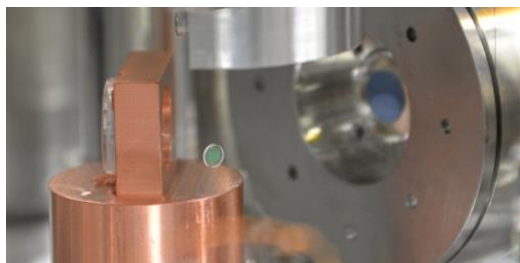


直交位相エンタングルメント

- 振りの位置・運動量の
スクイーズ状態生成



←arXiv2020 Matsumoto & Yamamoto

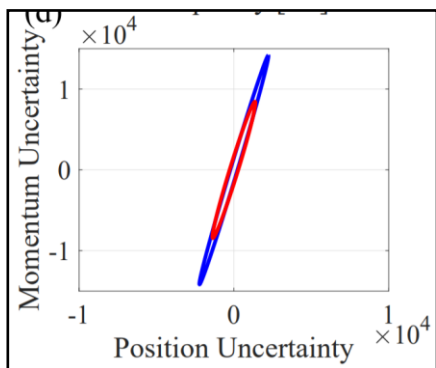
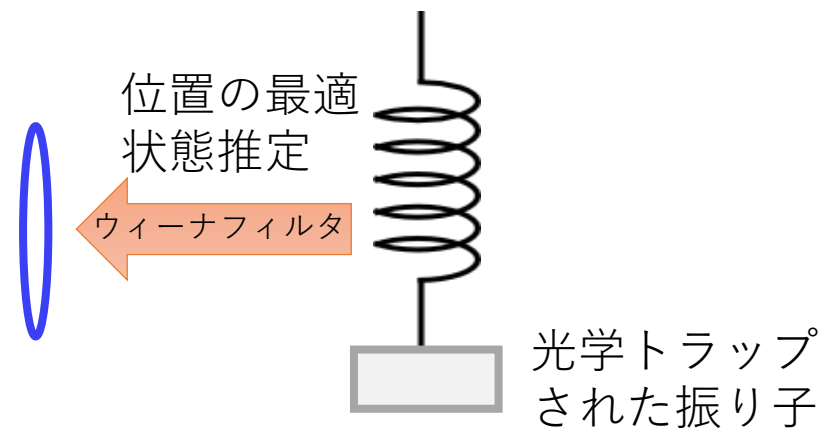


直交位相エンタングルメント

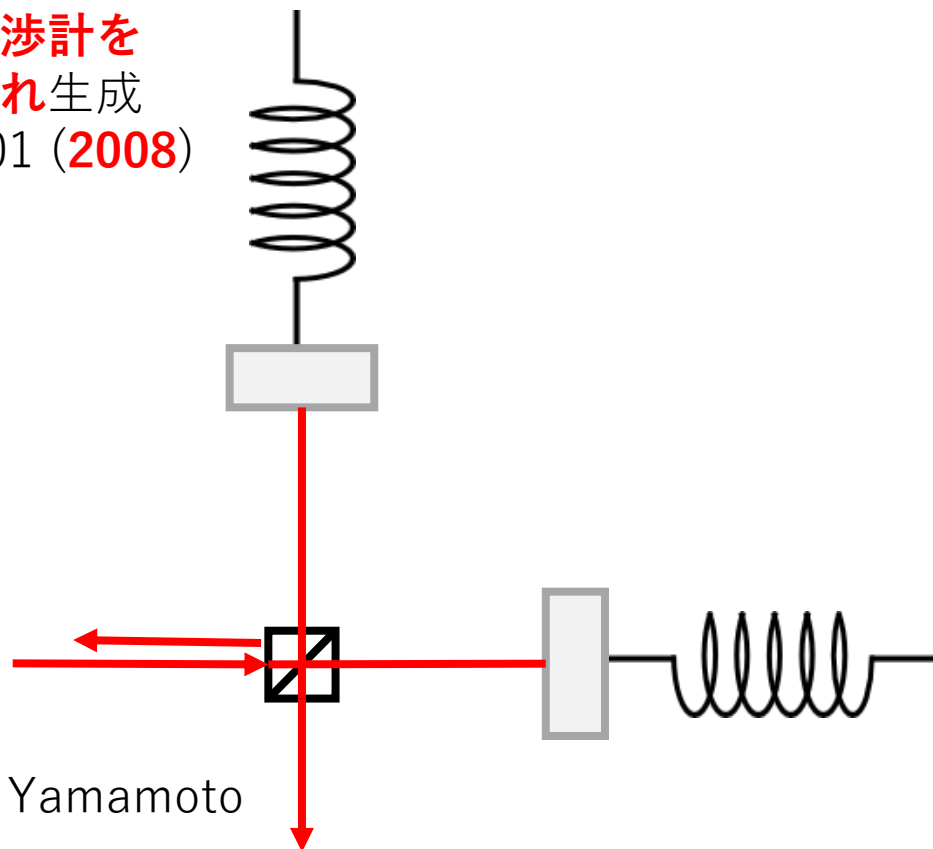
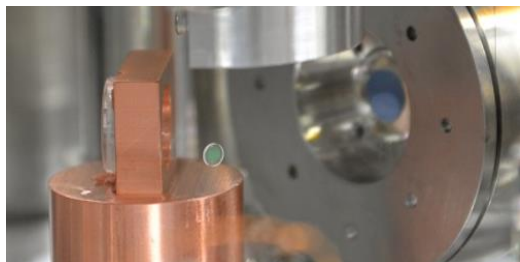
- 振り子の位置・運動量のスクイーズ状態生成

→ **2つの振り子の量子もつれ** (同相振動と差動振動)

マイケルソン干渉計を用いた量子もつれ生成
PRL 100, 013601 (2008)



← arXiv2020 Matsumoto & Yamamoto

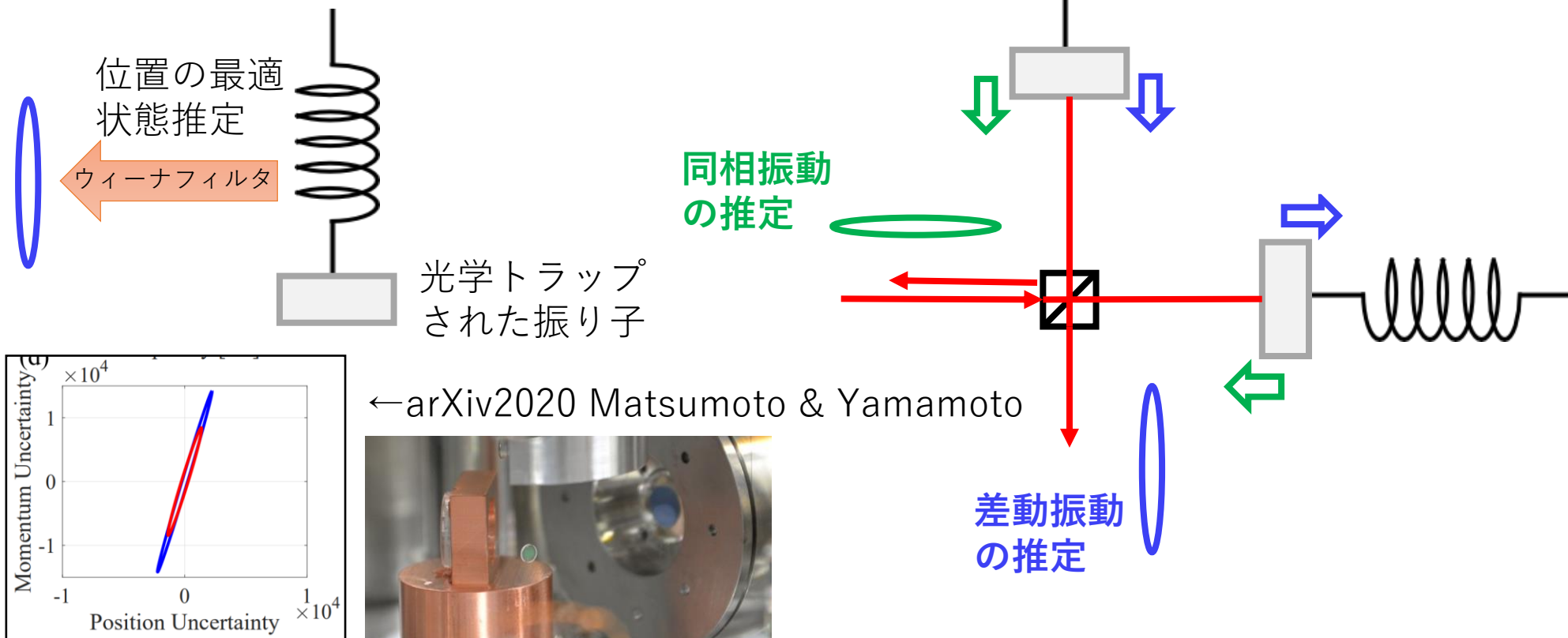


直交位相エンタングルメント

- 振り子の位置・運動量のスクイーズ状態生成

→ **2つの振り子の量子もつれ** (同相振動と差動振動)

マイケルソン干渉計を用いた量子もつれ生成
PRL 100, 013601 (2008)

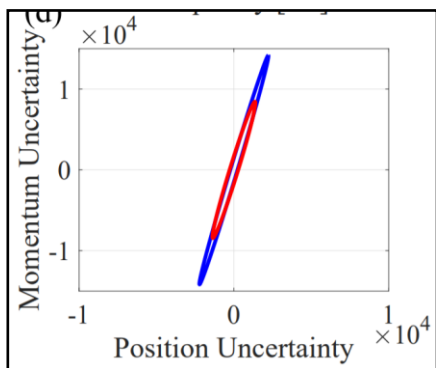
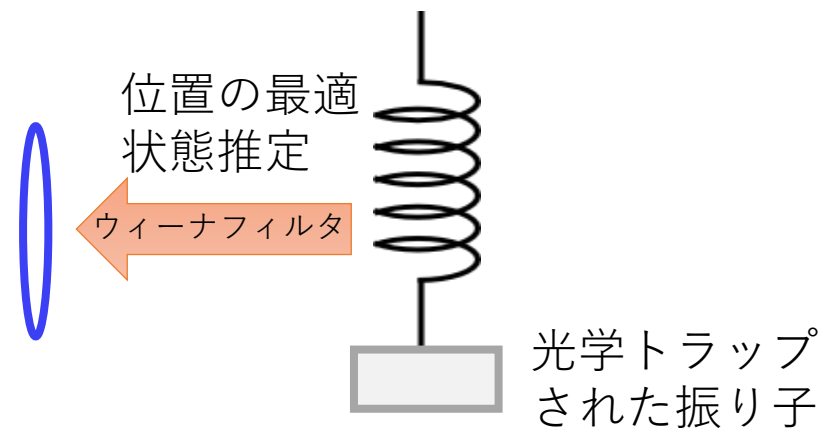


直交位相エンタングルメント

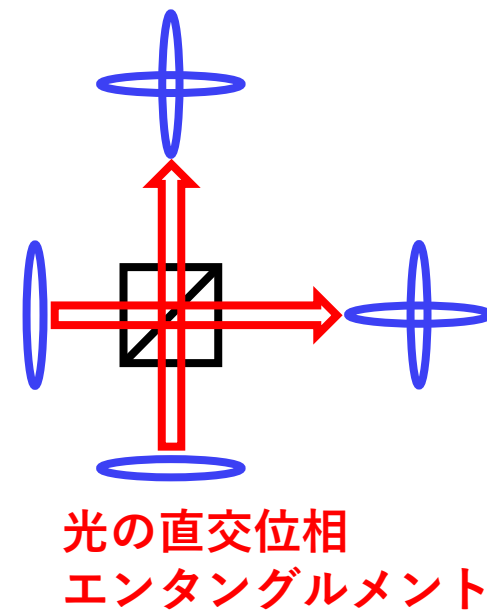
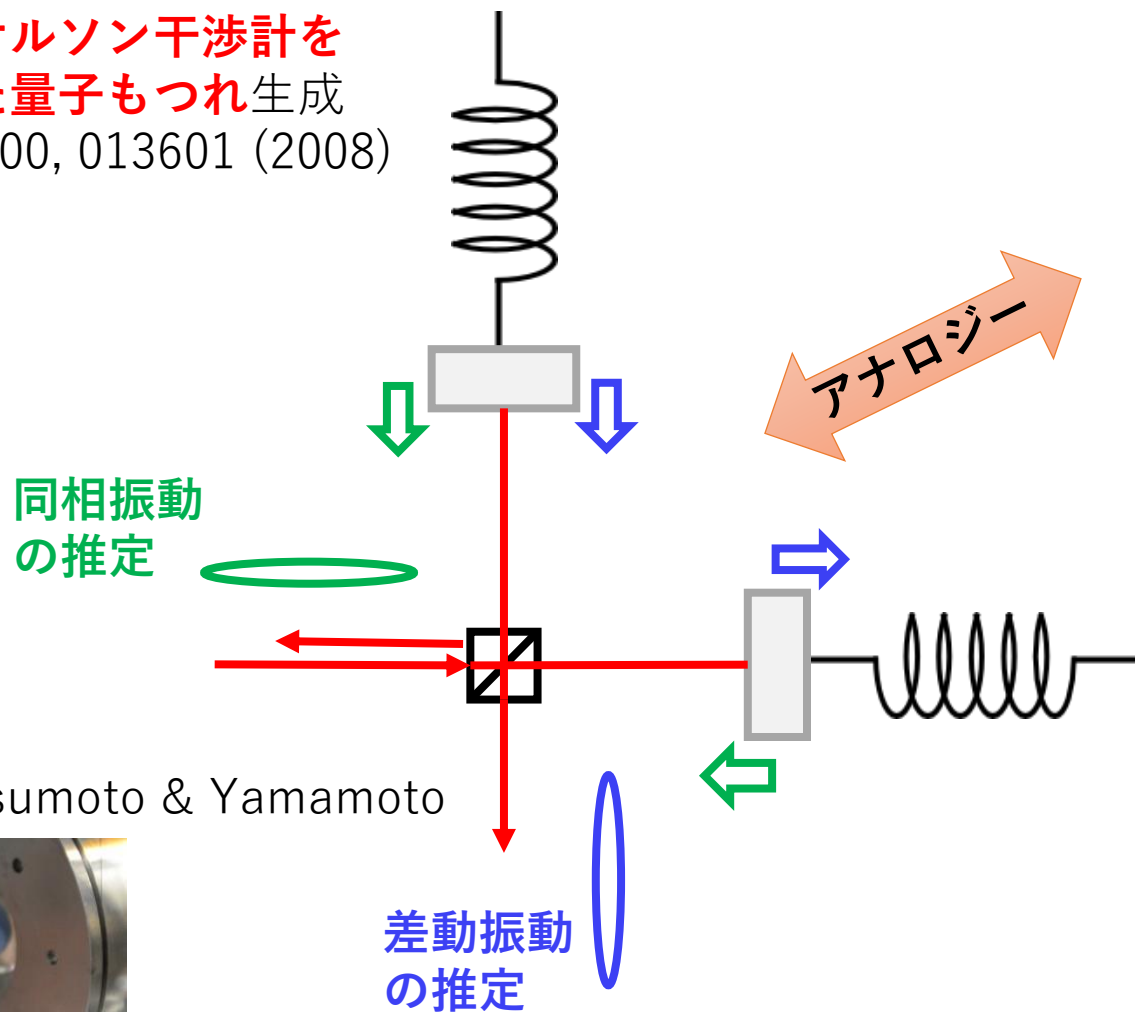
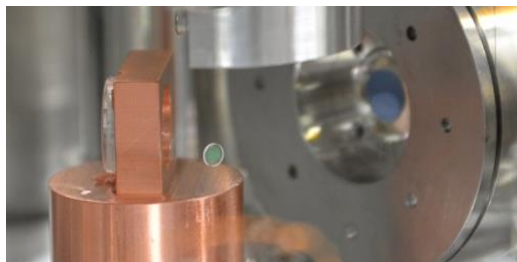
- 振り子の位置・運動量のスクイーズ状態生成

→ **2つの振り子の量子もつれ**
(同相振動と差動振動)

マイケルソン干渉計を用いた量子もつれ生成
PRL 100, 013601 (2008)



← arXiv2020 Matsumoto & Yamamoto



まとめ

重力デコヒーレンス・重力定数測定などに向けた巨視的振動子の量子制御

- 量子計測の条件

- 測定率、熱デコヒーレンス率、ショットノイズ、熱的揺動力

- 量子計測の条件を満たした巨視的な振動子

- 重力希薄化、光学希薄化、structural dampingによる低散逸化

- フィードバック冷却と量子推定

- 光ばね、スクイーズ状態、変位計測の低雑音化